



Die Kegelschnitte

in rein projectiver Behandlung.

Von

Joh. Thomae
in Jena.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten
und 16 lithogr. Figurentafeln.

Halle a. S.
Verlag von Louis Nebert.
1894.

Vorwort.

Dass die messende Geometrie, insbesondere die analytische Geometrie, der reinen projectiven Methode überlegen ist, kann nicht geläugnet werden. Sie gebietet eben nicht nur über die Hülfsmittel der letzteren, sondern bedient sich auch noch des ganzen Apparates, den algebraische und analytische Forschungen ihr bereit stellen. Anders gestaltet sich die Werthschätzung vom aesthetischen Gesichtspuncte. Das mathematisch-aesthetische Gefühl ist erst dann völlig befriedigt, wenn ein zu erbringender Beweis nur mit den für ihn gerade nothwendigen Hülfsmitteln geführt ist. Die Lehrsätze der projectiven Geometrie sind von Massverhältnissen unabhängig, die Beweise für ihre Lehrsätze befriedigen uns vollkommen erst dann, wenn sie rein projectiv erbracht sind. Wie ein schriller Pfiff in eine harmonische Musik tönt es herein, wenn z. B. in Schröter's Abhandlung über die Clebsch'sche Configuration, die im Allgemeinen projectiv gehalten ist, plötzlich eine quadratische Gleichung aufgelöst wird.

Im Jahre 1873 habe ich unter dem Titel einer Geometrie der Lage ein kleines Buch über ebene Gebilde erster und zweiter Ordnung veröffentlicht, dessen Inhalt dem vorliegenden neuen Werke einverleibt ist, das nun die Kegelschnitte weit gründlicher behandelt und namentlich die Grundaufgaben auch dann löst, wenn in dieselben ideale Elemente eingehen.

Von den Werken der Herren Zech, Cremona, Rulf, von den Steiner'schen Vorlesungen über Kegelschnitte, bearbeitet durch Schröter, unterscheidet sich das vorliegende Buch durch die Reinheit der Methode, von dem grossen Werke des Herrn Reye, in

dem man metrischen und trigonometrischen Formeln nur in Anhängen begegnet, unterscheidet es sich einerseits durch sein beschränkteres Ziel, da es nur ebene Gebilde behandelt, andrerseits durch sein erweitertes Ziel, da es ideale Gebilde einschliesst.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass dieses Buch, das wohl hie und da auch etwas Neues bringt, sich unter Lehrenden und Lernenden Freunde erwerben werde.

Jena, im October 1893.

J. Thomae.

Inhaltsverzeichniss.

Berichtigungen.

Seite 3 Zeile 14 lies: Dazu statt Dann
„ 5 „ 11 „ Euklidisch „ Enklidisch
„ 7 „ 1 „ durch zwei Puncte „ durch einen Punct.
„ 78 „ 14 „ analytisch „ analystisch
„ 108 „ 3 streiche die Worte: sind also perspectiv.

Einleitung.

Obschon dieser Schrift der Plan zu Grunde liegt, nur auf die Ebene bezügliche geometrische Betrachtungen anzustellen, so ist dies doch, wenn wir uns des Hülfsmittels des Messens mit einem im Raume beweglichen Massstabe entschlagen wollen, schlechterdings nicht möglich, ohne einen Satz heranzuziehen, der nur im dreifach ausgedehnten Raume bewiesen werden kann. Es ist der von Desargues herrührende Satz von den perspectiven Dreiecken. Ist dieser gewonnen, so braucht man dann niemals aus der Ebene herauszugehen, ausser etwa wenn man den Namen Kegelschnitt für eine Curve zweiter Ordnung rechtfertigen will, so muss man einen Kegel, ein räumliches Gebilde betrachten. Diese Betrachtung läuft aber nur nebenher, sie ist für den Gang der allgemeinen Untersuchung ohne wesentliche Bedeutung. Die Unmöglichkeit, den Raum ganz zu umgehen, zwingt uns, die Eigenschaften aufzuzählen, die man ihm in der projectiven Geometrie beilegt, die man als Axiome aus der Anschauung entnimmt. Auf metamathematische Speculationen lassen wir uns dabei nicht ein, sondern nehmen von den Elementargebilden, Punct, Gerade, Ebene an, dass uns gewisse einfache Beziehungen derselben unter sich und zum Raume, sowie ihre Vorstellung selbst, durch Anschauung unmittelbar klar und gewiss sind. Diesen allgemeinen Grundsätzen, und dem einen aus dem Raume zu nehmenden Satze geben wir in dieser Einleitung Platz.

Von dem Puncte, einer bestimmten Stelle im Raume, sagen wir, dass er keine Ausdehnung besitze. Dieser Begriff ist gewiss aus dem eines Raumtheiles, eines Körpers entstanden. Man hat von einem Körperchen immer weitere und weitere Theile abgesondert, und obwohl man, wie weit man auch diesen Process treiben mag, im Reste doch immer wieder Theile von einander zu unterscheiden vermag, und obwohl man, wenn von einem

Puncte geredet wird, genau genommen immer jenen endlosen Process zu denken hat, so ist doch unser Verstand glücklicher Weise so beanlagt, dass er ein ideales Ende jenes Processes, wenn auch nicht deutlich vorzustellen, so doch zu setzen vermag, so dass wir sagen können: Ein Punct bezeichnet einen Ort im Raume, in dem selbst Ortsverschiedenheit nicht mehr vorhanden ist. Wir haben uns jedenfalls an eine solche Ortsbestimmung so gewöhnt, das wir den Punct als vorstellbar, als real ansehen.

Führen wir unsere Vorstellung von einem Puncte des Raumes zu einem anderen, so überspringen wir in der Regel den die Puncte trennenden Raum nicht, sondern durchlaufen mit der Vorstellung einen Weg, eine Linie. Selbstverständlich ist eine solche Linie zunächst ein Balken, oder wenigstens eine Faser, aber das schon beim Puncte angewandte Abstractionsverfahren lässt die Faser dünner und dünner werden, so dass, wie wir sagen, nur noch eine Ausdehnung übrig bleibt. Der Begriff der Linie wird als ein gesicherter angesehen. In einer einfachen, über keinen Punct zweimal führenden (knotenlosen) Linie giebt es an jeder Stelle nur zwei Möglichkeiten stetiger Ortsänderung, man kann von jedem Puncte derselben nach zwei und nur nach zwei Seiten fortschreiten, an den Grenzen, wenn deren vorhanden sind, nur nach einer. Hier stossen wir auf den Begriff der Continuität oder Stetigkeit. Eine Definition der Continuität, des vollkommenen überall gleichförmigen Zusammenhanges einer Linie, so wie der Continuität des Raumes zu geben, unterlasse ich, nehme an, dass dieser Begriff durch unmittelbare Anschauung allen Geometern gegeben sei. Ganz anders verhält es sich damit bei der Zahlenreihe. In ihr ist das Einzelne, die Zahl das Primäre und es ist erst durch genaue Definition festzustellen, was man unter Continuität der Zahlenreihe zu verstehen hat. Im Raume aber ist die Vorstellung eines Continuums, eines Körpers, das Primäre, von dem man erst durch Abstraction zum Einzelnen, zum Puncte gelangt. Ob die Continuität der Zahlenreihe und die einer Linie vollkommen gleichwerthige Begriffe seien, scheint mir zweifelhaft, wenigstens bin ich nicht im Stande, mir eine Strecke ohne Anfangspunct vorzustellen, während in der Zahlenreihe eine endliche bestimmte Zahlstrecke, wenn dieser Ausdruck erlaubt ist, ohne bestimmte Grenzen jedem Mathematiker eine geläufige Vorstellung ist.

Die einfachste Linie, die wir durch zwei Punkte denken können, ist die Gerade. Ich versuche es hier nicht eine Definition der Geraden zu geben, sondern begnüge mich, die Eigenschaften

aufzuzählen, welche man dieser Linie zuschreibt. Vielleicht können eben diese Eigenschaften als Definition angesehen werden. Dass sich eine Gerade in sich selbst verschieben lasse, oder ihren Ort nicht ändere, wenn man sie um zwei ihrer Puncte dreht, kann hier nicht zur Definition verwerthet werden. Denn der Raum ist an sich unbeweglich, wir lassen einzig unsere Vorstellung von einem Raumgebilde zu einem andern übergehen. Wenn gleichwohl Redensarten, wie drehen, verschieben unterlaufen, so muss doch ein für allemal festgelegt werden, dass hier nur Vorstellungsänderungen gemeint sind. — Die elementaren Aussagen über die gerade Linie sind die folgenden:

Eine gerade Linie ist durch zwei Punkte vollständig bestimmt.

Zwei gerade Linien, die nicht mit einander zusammenfallen, können sich nur in einem Puncte schneiden.

Dann kommen nachher noch Aussagen über gerade Linien, die in derselben Ebene liegen.

Der Fortsetzung einer geraden Linie ist nach zwei Seiten hin keine Grenze gesetzt. Man setzt eine Gerade im gleichen Sinne fort, wenn man (in der setzenden Vorstellung) keinen Punct zweimal erzeugt oder durchläuft. Der Process, eine Gerade nach der einen oder der andern Seite hin immer im gleichen Sinne zu durchlaufen, führt zu keinem Ende, weil der Raum als unbegrenzt gedacht wird. Man adjungirt aber der Geraden einen uneigentlichen oder unendlich fernen Punct, welcher gewissermassen das Ende dieses Processes bedeutet, und zwar sagen wir, dass wir zu diesem uneigentlichen Puncte gelangen, gleichviel ob wir auf der Geraden nach der einen oder der andern Seite ohne Ende vorrücken. Hierin mag man Willkühr erblicken. Kann man nicht einer Geraden zwei uneigentliche Puncte, entsprechend dem doppelten Sinne in dem man sie durchlaufen kann adjungiren? Das kann man in der That, ja es lässt sich eine projective Geometrie durchführen in einem endlichen Theile des Raumes, in der das Aeussere dieses Raumes als unzugänglich, als uneigentlich angesehen wird, so dass zu einer Geraden unendlich viele uneigentliche Puncte gehören. Man vergleiche darüber eine Arbeit von Herrn Schur in den Leipziger Annalen B. 39. Adjungirt man jeder Geraden einen und nur einen uneigentlichen Punct, so wird die Mannigfaltigkeit aller uneigentlichen Puncte ein Elementargebilde, eine Ebene wie sich zeigen wird, und es führt diese Annahme zu der sogenannten Euklidischen Geometrie. Tiefer liegende Untersuchungen haben ergeben, dass die En-

klidische Raumauffassung nicht ein specieller, sondern ein singulärer Fall aller möglichen Raumauffassungen ist. Allen praktischen Anwendungen der Geometrie aber wird die Euklidische Raumauffassung zu Grunde gelegt. Zwar kann nicht bewiesen werden, dass dies eine Nothwendigkeit sei, aber vielleicht liegt gerade darin, dass diese Raumauffassung eine singuläre ist, ihr Vorzug. Denn unter den übrigen möglichen Raumauffassungen giebt es unendlich viele einander gleichberechtigte, während die Euklidische eben einzig in ihrer Art ist. Wie dem auch sein mag, wir lassen hier die Euklidische Raumauffassung gelten, adjungiren einer jeden Geraden einen und nur einen uneigentlichen oder unendlich fernen Punct.

Das Stück einer Geraden zwischen zwei Puncten AB, das den uneigentlichen Punct nicht enthält, pflegt man eine Strecke zu nennen, und die Puncte dieser Strecke heissen Puncte innerhalb AB. Das Stück der Geraden, welches den uneigentlichen Punct enthält, und durch seine Vermittelung zusammenhängend wird, heisst das ausserhalb AB liegende Stück der Geraden. Liegt eine Strecke ganz innerhalb einer andern, so kann man die erstere die kleinere nennen, ohne deshalb ein Mass einzuführen. — Man nennt eine Gerade auch einen Strahl, und wenn mehrere eine Figur bilden, eine Seite, die Schnittpuncte von Geraden werden bei Figuren Ecken genannt.

Legt man durch einen Punct im Raume, und jeden Punct einer Geraden eine Gerade, d. h. stellt man sich den Inbegriff aller dieser Geraden vor, so erhält man eine Ebene. Man sagt von den Geraden durch den Punct, dass sie die Puncte der Geraden projiciren, nennt ihre Gesammtheit einen linearen, auch schlechthin einen Büschel, und den Punct durch den die projicirenden Geraden oder Strahlen gehen, den Träger oder den Stützpunct des Büschels. Geht man mit der Vorstellung von einem Strahl zu einem andern, so kann dies von jeder Stelle, von jedem Strahle aus nach zwei Seiten geschehen, so wie man in einer geraden Linie von jedem Puncte aus nach zwei Seiten fortschreiten kann. Man legt der Mannigfaltigkeit der Strahlen dieselbe Mächtigkeit bei wie den Puncten einer Geraden, auf die sie durch die Methode des Projicirens eineindeutig bezogen sind. Aus diesem Grunde sagt man, die Ebene habe zwei Ausdehnungen, sie sei eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Puncten, denn die Puncte lassen sich anordnen in eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen, von denen jeder eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Puncten enthält.

Als ein Axiom, das wir nicht zu erweisen brauchen, betrachten wir den Satz, dass eine Gerade, die zwei Puncte mit einer Ebene gemein hat, ganz in dieselbe falle. Es ist der Satz, auf dem die Möglichkeit des Tischlerhobels beruht.

Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich stets. Die Geraden seien g und h. Legt man durch einen Punct P auf g und jeden Punct der Geraden h gerade Linien, so erzeugen diese Geraden die ganze Ebene, der h projicirende Büschel muss daher auch die Gerade g enthalten, weil sie den Punct P enthält. Allerdings kann g durch einen uneigentlichen Punct von h gehen, man sagt dann g sei h parallel. Die Annahme der Euklidischen Raumauffassung, dass h nur einen uneigentlichen oder unendlich fernen Punct habe, ist identisch mit der Thatsache oder dem Axiom, dass es durch einen Punct ausserhalb h nur eine zu h parallele Gerade giebt. Die Mannigfaltigkeit der uneigentlichen Puncte der Ebene ist von derselben Mächtigkeit, als die Mannigfaltigkeit der Strahlen eines Büschels, und folglich der Puncte einer Geraden, auf die sie eineindeutig bezogen werden kann. Sie hat die Eigenschaft, mit jeder Geraden der Ebene einen und nur einen Punct gemein zu haben. Aus diesem Grunde fasst man die uneigentlichen Puncte der Ebene in dem Begriffe „uneigentliche oder unendlich ferne Gerade“ zusammen. Parallele Gerade haben ihren uneigentlichen, ihren unendlich fernen Punct gemein.

Durch drei Puncte, unter denen uneigentliche sein können, die aber nicht in einer Geraden liegen, ist eine Ebene völlig bestimmt.

Zwei Ebenen, die nicht zusammenfallen, schneiden sich in einer Geraden, die auch eine uneigentliche sein kann. Im letztern Falle sagt man, die Ebenen seien einander parallel, oder sie haben gleiche Stellung.

Projicirt man die Puncte einer Ebene von einem Puncte ausserhalb derselben in eine ihr nicht parallele, d. h. bringt man die die erste Ebene projicirenden Strahlen zum Schnitt mit der zweiten, und nennt die Schnittpuncte (Treffpuncte) eines Strahles mit beiden Ebenen Projectionen von einander, so ist die Projection der uneigentlichen Geraden der einen Ebene in die andere eine gemeine Gerade, weil alle Strahlen, die die uneigentlichen Puncte der einen Ebene projiciren, in einer Ebene liegen, die der andern nicht parallel ist, und sie in einer eigentlichen Geraden schneidet. Hierin sehen wir einen weiteren Grund dafür, dass es zulässig sei, an den Begriff der Mannigfaltigkeit der uneigentlichen Puncte einer Ebene den Namen „Gerade“ zu heften.

Zwei Ebenen schneiden eine dritte in zwei Geraden, die, wenn sie nicht zusammen fallen, sich in einem eigentlichen oder uneigentlichen Puncte schneiden. Dies giebt den Satz:

Drei Ebenen, die nicht eine Gerade (Achse) gemein haben, schneiden sich in einem und nur einem eigentlichen oder uneigentlichen Puncte.

Eine Gerade, die nicht ganz in eine Ebene fällt, trifft diese in einem und nur einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Puncte, denn sie kann als Schnitt zweier Ebenen aufgefasst werden.

Drei gerade Linien, von denen jede die andere schneidet, treffen sich in einem Puncte, wenn sie nicht in einer Ebene liegen. Denn zwei gerade Linien, die sich schneiden, bestimmen eine Ebene. Trifft nun die dritte Gerade die ersteren in verschiedenen Puncten, so liegt diese dritte Gerade ganz in dieser Ebene.

Projicirt man von einem Puncte ausserhalb einer Ebene die Puncte derselben, so erfüllen die projicirenden Strahlen den ganzen Raum, sie bilden einen Bündel, eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen. Denn der Bündel ist von derselben Mächtigkeit als die Puncte der projicirten Ebene, auf die er eineindeutig bezogen ist. Der Raum ist deshalb eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Puncten, hat drei Ausdehnungen, denn in jedem Strahle des Bündels haben die Puncte noch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit.

Die uneigentlichen Puncte des Raumes haben mit jeder Geraden einen Punct, mit jeder Ebene eine Gerade gemein. Man fasst deshalb die uneigentlichen Puncte des Raumes unter dem Begriff der uneigentlichen oder unendlich fernen Ebene zusammen.

Die Geltung der ausgesprochenen Sätze ist nicht davon abhängig, ob sie sich auf eigentliche oder uneigentliche Elemente beziehen, sie bilden die Operationsbasis der projectiven Geometrie. Für sie ist es gleichgültig, ob ein Element eigentlich oder uneigentlich ist, und es kann das Prädikat „uneigentlich" im Allgemeinen unterdrückt werden. Erst wenn man auf gewisse Gebilde, die man vor andern auszeichnet, eine projective Massbestimmung gründen will, greift man am natürlichsten zu den uneigentlichen Elementen, was zwar nicht nothwendig, aber doch wegen der Besonderheit, die sie in unserer Vorstellung einnehmen, angezeigt ist. Namentlich bei Construktionen, die ein äusseres Hülfsmittel, das Lineal erfordern, zeichnen sich die uneigentlichen Elemente ganz von selbst aus. In der reinen Raumlehre könnte man von Construktionen absehen, die Postulate auf-

stellen, dass durch einen Punct eine Gerade, als Schnitt zweier Geraden ein Punct als völlig bestimmt anzusehen sei, man könnte sich mit dem Beschreiben von Figuren begnügen. Es leuchtet aber ein, dass es eine grosse Unterstützung der Vorstellung ist, der nur Wenige sich entschlagen möchten, wenn die geometrischen Gebilde durch Zeichnungen dargestellt werden. Ich halte es für nützlich, von Figuren einen ausgedehnten Gebrauch zu machen, da ergeben sich Constructionsaufgaben von selbst, für welche als das vorzüglichste und elementarste Hülfsmittel das Lineal anzusehen ist. In wie weit man mit demselben auch Construktionen ausführen kann, wenn uneigentliche Elemente auftreten, wird die Folge lehren, es würde aber, wie ich sogleich bemerke, die Systematik der Geometrie wesentlich stören, wollte man die Aufgaben, zwei Puncte durch eine Gerade zu verbinden, oder den Schnitt zweier Geraden zu construiren, dann nicht zu den linearen rechnen, wenn sie uneigentliche Construktionselemente enthalten.

Der Begriff der dualistischen Verwandtschaft wird später genauer auseinander gesetzt werden; es ist angebracht, schon hier einige vorläufige Bemerkungen darüber einzuschalten. — Die Ebene kann ebensowohl als Punctfeld, wie als Geradenfeld angesehen werden, es giebt also eine dualistische Auffassung der Ebene. Zwei Puncte bestimmen eine Gerade, zwei gerade Linien bestimmen einen Punct, sind dualistisch gegenüberstehende Sätze. Ein Dreieck hat drei Seiten, ein Dreiseit hat drei Ecken. Ein Viereck hat sechs Seiten und drei Nebenecken (weitere Schnittpuncte der sechs Seiten), ein Vierseit hat sechs Ecken und drei Nebenseiten (Diagonalen). Ein n-Eck hat $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Seiten und $\frac{1}{8}n\,(n-1)\,(nn-5\,n+6)$ Nebenecken, ein n-Seit hat $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ Ecken und $\frac{1}{8}n\,(n-1)\,(nn-5\,n+6)$ Nebenseiten. Eine Gerade ist Träger einer Punctreihe, ein Punct ist Träger einer Strahlenreihe (eines Büschels). Man wird zunächst das Vorhandensein der Dualität als eine Thatsache fortlaufend registriren, bis dieselbe auf das Princip der Polarität systematisch gegründet wird.

Ehe ich mich nun zur projectiven Untersuchung des Raumes, speciell der Ebene auf Grund der ausgesprochenen Sätze wende, will ich mich noch einmal dagegen verwahren, als ob ich diese Sätze, weil einige erörternde Bemerkungen eingeflossen sind, habe erkenntnisstheoretisch begründen wollen. Diese Aufgabe lehne ich ab, stütze mich auf die ausgesprochenen Sätze wie auf Axiome. — Wir verstehen unter reiner Geometrie den Theil der Raumlehre, in dem von der Existenz eines beweglichen Massstabes abgesehen wird. Dass diese reine Geometrie deswegen

nicht auf Betrachtung von Massverhältnissen überhaupt verzichten muss, ergiebt das Nachfolgende, und es braucht daher der etymologisch den Begriff des Messens enthaltende Name „Geometrie“ nicht verworfen zu werden.

Es folgt nun (Fig. 1) der Satz von den perspectiven Dreiecken. — Schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken zweier in verschiedenen Ebenen ε und ε'' liegenden Dreiecke in einem Puncte G'', mit anderen Worten, sind die beiden Dreiecke ABC in ε und $A''B''C''$ in ε'' einander perspectiv ($\overline{\wedge}$), so schneiden sich die entsprechenden Seiten abc, $a''b''c''$ dieser Dreiecke paarweise auf der gemeinsamen Achse g der Dreiecksebenen ε, ε'', also auf einer Geraden. — Die Strahlen $G''A''A$, $G''B''B$, $G''C''C$ mögen bez. mit l'' m'' n'' bezeichnet werden. Dann liegen die Geraden aa'' in der Ebene $m''n''$ und schneiden sich deshalb in einem Puncte L. Ebenso schneiden sich bb'' (Ebene $l''n''$) in einem Puncte M, und cc'' (Ebene $l''m''$) in einem Puncte N. Die Schnittpuncte aber müssen in den beiden Ebenen ε, ε'' liegen, also auf deren Achse g, also auf einer Geraden w. z. b. w. — Daran ändert sich nichts, wenn einige der vorkommenden Elemente uneigentliche sind.

Schneiden sich die Seiten zweier Dreiecke abc, $a''b''c''$ paarweise in drei Puncten einer Geraden, die natürlich die Achse g der beiden Dreiecksebenen ε, ε'' sein muss, so liegen die Dreiseite perspectiv, d. h. die Verbindungslinien $l''m''n''$ der entsprechenden Ecken AA'', BB'', CC'' gehen durch einen (vielleicht uneigentlichen) Punct G''.

Beweis. Die Linien $m''n''$, $n''l''$, $l''m''$ liegen paarweise in einer Ebene, nämlich in den Ebenen aa'', bb'', cc'', sie sind die Schnittlinien dreier Ebenen, folglich müssen sie sich in einem Puncte schneiden.

Dreiecke (oder Dreiseite), die in derselben Ebene liegen, heissen einander perspectiv, wenn entweder die Verbindungslinien von drei Paaren verschiedener Ecken durch einen Punct gehen, oder wenn sich die Seiten paarweise in drei Puncten einer Geraden schneiden. Die eine Eigenschaft aber ist eine nothwendige Folge der andern.

Beweis. 1. Es mögen die Seiten aa', bb', cc' der Dreiecke bez. durch die Puncte LMN einer Geraden g gehen. Durch g legen wir eine Ebene ε'' und ziehen in ihr durch LMN drei sich nicht in einem Puncte schneidende gerade Linien $a''b''c''$, sie bilden ein Dreiseit, welches nach dem eben bewiesenen Satze sowohl abc, als auch $a'b'c'$ perspectiv liegt. Die Verbindungslinie

h der Perspectivitätscentren $G'G''$ (Fig. 1) trifft die Ebene ε der gegebenen Dreiseite in einem Puncte G, durch welchen die Verbindungslinien lmn der Dreiseitsecken AA', BB', CC' hindurch gehen, weil sie in den Ebenen der Geradenpaare $SA''A$, $S'A''A'$ oder $l''l'$ bez. in den Ebenen $m''m'$, $n''n'$ liegen und daher die Gerade h treffen müssen, was nur im Puncte G $(h\varepsilon)$ möglich ist. 2. Es mögen die Verbindungslinien AA', BB', CC' (l, m, n) der Ecken der beiden Dreiseite durch einen Punct G gehen, dann legen wir durch G eine nicht in die Ebene ε fallende Gerade h, und projiciren von zwei Puncten $G'G''$ derselben bez. die Dreiecke ABC und $A'B'C'$. So schneiden sich die Geraden $G''A$, $G'A'$ $(l''l')$ in einem Puncte A'', weil diese Linien in einer Ebene, der Ebene hl liegen. Ebenso schneiden sich die Geraden $m''m'$ in einem Punct B'', $n''n'$ in einem Puncte C'', weil diese Linien bez. in den Ebenen mh, nh liegen. Das so erhaltene Dreieck $A''B''C''$, welches in einer von ε verschiedenen Ebene ε'' liegt, ist nun sowohl dem Dreieck ABC als auch dem Dreieck $A'B'C'$ perspectiv, die Seiten des letzteren schneiden sich in den drei Puncten der Achse g der Ebenen ε, ε'', welche die Seiten $a''b''c''$ des Dreiecks $A''B''C''$ auf ihr bestimmen, also auf einer Geraden, w. z. b. w.

Obwohl der Punct G, als in der Ebene der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ liegend, nicht eigentlich als Perspectivitätscentrum betrachtet werden kann, so soll doch dieser Name, der zutreffen würde, wenn die Dreiecke in verschiedenen Ebenen lägen, gewissermassen für die Grenzlage des Zusammenfallens der Ebenen, beibehalten werden. Die Gerade g aber, auf der die entsprechenden Seiten sich schneiden, nennen wir die Perspectivitätsachse.

Sind die Seiten zweier Dreiecke parallel, ist ihre Perspectivitätsachse die uneigentliche Gerade ihrer Ebene, so heissen die Dreiecke ähnlich, und das Perspectivitätscentrum heisst Aehnlichkeitspunct.

Sind zwei Paare paralleler gerader Linien aa', bb' gegeben, so kann man linear zu einer Geraden c eine parallele c' construiren. Man sehe abc als ein Dreieck an, dessen abc gegenüberliegende Ecken bez. mit ABC bezeichnet werden. Auf a' nehme man einen Punct B' willkürlich an, bezeichne den Punct $(a'b')$ mit C', so muss der Punct A' auf b', der eine durch B' gehende c parallele Gerade c' bestimmt, mit A verbunden durch den Punct G gehen, den die Geraden BB', CC' bestimmen. Dadurch ist A' bestimmt.

Sieht man Fig. 1 als eine ebene Zeichnung an, so gewinnt man sofort den Satz. — Gehen die Seiten dreier Dreiecke zu je

dreien durch je einen Punct auf einer Geraden, so schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken je zweier Dreiecke in drei Puncten einer Geraden. Diese Gerade ist die Perspectivitätsachse der beiden Dreiecke $AA'A''$, $BB'B''$.

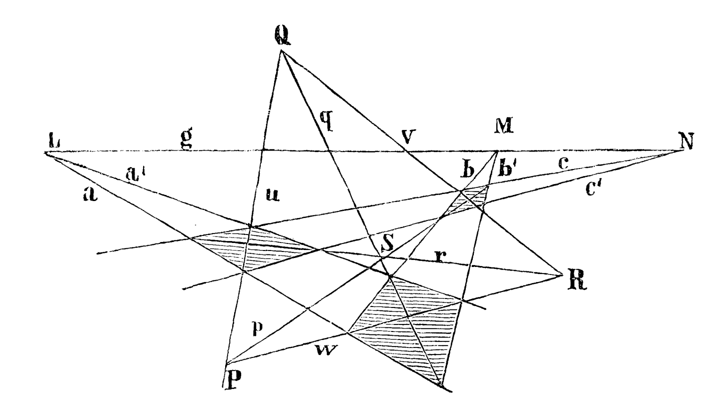
Gehen die Verbindungslinien der Ecken je zweier von drei Dreiecken durch einen Punct, AA', BB', CC' durch G, $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ durch G', $A''A$, $B''B$, $C''C$ durch G'', und liegen die drei Puncte $GG'G''$ auf einer Geraden h, so schneiden sich die Seiten dieser Dreiecke zu je dreien in je einem Puncte, in den Puncten LMN, die auf einer Geraden g liegen. Zum Beweis betrachte man die Dreiecke $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$.

Diesem Satze steht dualistisch der folgende gegenüber (Fig. 2). Liegen die Ecken dreier Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ zu je dreien auf einer Geraden durch einen Punct G, $GAA'A''$ auf l, $GBB'B''$ auf m, $GCC'C''$ auf n, so schneiden sich die entsprechenden Seiten je zweier Dreiecke, $a'a''$ in L, $b'b''$ in M, $c'c''$ in N; $a''a$ in L', $b''b$ in M', $c''c$ in N'; aa' in L'', bb' in M'', cc' in N'' so, dass diese Puncte zu je dreien auf einer Geraden liegen, LMN auf g, $L'M'N'$ auf g', $L''M''N''$ auf g'', und die drei Geraden $gg'g''$ schneiden sich in einem Puncte H. Dieser Punct H ist das Perspectivitätscentrum der beiden Dreiseite $aa'a''$, $bb'b''$.

Es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, dass zwei Dreiecke einander mehrfach perspectiv liegen können. — Soll (Fig. 3[a]) das Dreieck ABC dem Dreieck $A'B'X$ perspectiv sein, so liegt X auf der Geraden $G'C$, wenn G' der Schnittpunct von AA', BB' ist. Soll $ACB \,\overline{\wedge}\, A'B'Y$ sein, so liegt Y auf der Geraden $G''B$, wenn G'' der Schnittpunct von AA', CB' ist. Lässt man die Puncte XY auf den Punct C' fallen, in dem sich die Geraden $G'C$, $G''B$ schneiden, so liegen die beiden Dreiecke doppelt perspectiv. — Besonders interessant ist der Fall (Fig. 3[b]) in dem $ABC \,\overline{\wedge}\, A'B'C'$ und $ABC \,\overline{\wedge}\, B'C'A'$ ist, in dem also eine cyclische Vertauschung entsprechender Ecken statt hat. Ist $ABC \,\overline{\wedge}\, A'B'X$ und $ABC \,\overline{\wedge}\, B'YA'$, und sind $G'\,G''$ die beiden Perspectivitätscentren, so kann X willkürlich auf $G'C$, Y willkürlich auf $G''B$ genommen werden. Lässt man XY in den Punct C' zusammenfallen, in dem sich $G'C$, $G''B$ schneiden, so ist zwischen den beiden Dreiecken ABC, $A'B'C'$ die verlangte doppelte Perspectivität vorhanden. Später wird der (Pascal'sche) Satz bewiesen, dass in dem Sechsecksechsseit $AG'CB'G''B$, dessen Ecken auf $G'B'$ und $G''C$ liegen, sich die gegenüberliegenden Seiten, AG' und $B'G''$, $G'C$ und $G''B$, CB' und BA' in drei Puncten einer Geraden, in den Puncten $AC'G$ schneiden. Daraus folgt, dass

auch noch $ABC \overline{\wedge} C'A'B'$ ist. Die drei Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $G'G''G$ sind paarweise einander dreifach perspectiv, und die Perspectivitätscentren je zweier sind die Ecken des dritten Dreiecks. — Zwei Dreiecke können einander auch vierfach, in idealer Weise sogar sechsfach perspectiv liegen. Man lese darüber eine Abhandlung Schröters im II. Bande der Leipziger Annalen p. 553.

Mittels des Satzes von den perspectiven Dreiecken mag noch folgende Configuration und die ihr dualistische besprochen werden. — Gehen von drei Puncten LMN einer Geraden g drei Strahlenpaare aa', bb', cc' aus, so bilden je zwei dieser Paare drei Vierseite, deren Nebenseiten $p\,q\,r\,u\,v\,w$ sich viermal zu je dreien in



einem Puncte, nämlich in den Puncten $P\,Q\,R\,S$ schneiden. Und dualistisch — liegen drei Punctpaare AA', BB', CC' auf Geraden $l\,m\,n$ durch einen Punct G, so bilden je zwei der Paare AA', BB', CC' drei Vierecke, deren Nebenecken $P\,Q\,R\,U\,V\,W$ viermal zu je dreien auf einer der Geraden $pqrs$ liegen. — Zum Beweise betrachte man die perspectiven Dreiseite $abc \overline{\wedge} a'b'c'$, $abc' \overline{\wedge} a'b'c$, $ab'c \overline{\wedge} a'bc'$, $a'bc \overline{\wedge} ab'c'$, im dualistischen Satze die perspectiven Dreiecke $ABC \overline{\wedge} A'B'C'$, $ABC' \overline{\wedge} A'B'C$, $AB'C \overline{\wedge} A'BC'$, $A'BC \overline{\wedge} AB'C'$.

Kapitel I.

Lineare Gebilde. Die harmonische, die perspective und die projective Beziehung.

In einem Vierseit (Fig. 4) $acef$ bestimmen zwei Nebenseiten dq auf der dritten r zwei Puncte BD, die mit den auf ihr liegenden Ecken AC eine harmonische Punctreihe bilden, und dualistisch:

In einem Viereck $ACEF$ bestimmen zwei Nebenecken DQ mit der dritten R zwei Strahlen bd, die mit den durch R gehenden Seiten ac einen harmonischen Strahlenbüschel bilden.

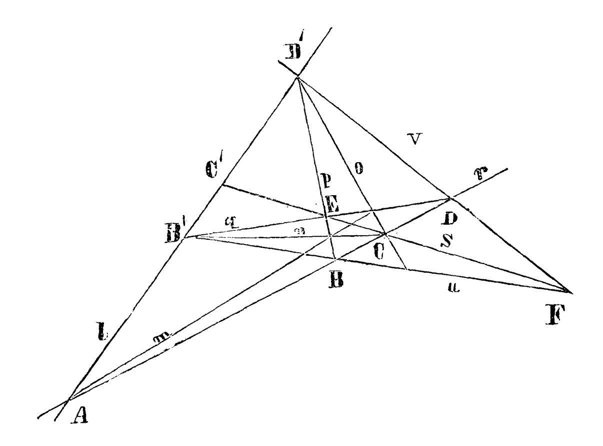
Aendert B seine Lage, während AC festbleiben, z. B. dadurch dass F verändert wird, so ändert auch D seine Lage. Fällt F auf R, so fällt B auf C und D auf C. Die Ecken AC heissen zugeordnete Puncte der harmonischen Reihe $ABCD$, und BD heissen ebenfalls einander zugeordnet. — Die Geraden ac in dem harmonischen Büschel $abcd$, zwei Seiten des Vierecks $ACEF$ heissen zugeordnete Strahlen, und bd heissen ebenfalls zugeordnet. Zugeordnete Elemente sind durch einander getrennt, man kann von dem einem auf continuirliche Art nicht zum andern gelangen, ohne über eins der beiden andern Elemente hinweg zu gehen. Man sagt deshalb auch, die Puncte AC seien durch BD, oder die Strahlen ac seien durch bd harmonisch getrennt. Sind $\alpha\beta\gamma\delta$ vier harmonische Elemente (Puncte oder Strahlen), so wählt man in der Regel die Schreibweise so, dass getrennte Elemente auch in der Bezeichnung getrennt sind. Es sind in der Figur nicht nur $ABCD$ vier harmonische Puncte, und $abcd$ harmonische Strahlen, sondern auch $F(dq)ED$, $R(dq)QB$ sind harmonische Puncte, und $cdf(QD)$, $bq(QD)r$ sind harmonische Büschel. In unserer Figur werden harmonische Puncte durch harmonische Strahlen projicirt.

Es muss nun die wesentliche Eigenschaft harmonischer

Elemente bewiesen werden, dass durch drei und die Zuordnung das vierte vollkommen eindeutig bestimmt ist.

Haben zwei Vierseite (Fig. 5) $lmno$, $l'm'n'o'$ eine gemeinsame Nebenseite r, und auf ihr die gemeinsamen Ecken AC, und gehen die Nebenseiten p, p' durch denselben Punct B auf r, so gehen die beiden andern Nebenseiten q, q' durch den nämlichen Punct D auf r.

Beweis. Es ist $EGH \overline{\wedge} E'G'H'$, weil sich die Seiten dieser Dreiecke paarweise in Puncten einer Geraden r treffen. Mithin gehen die Geraden GG', EE', HH' durch einen Punct S. Ebenso ist $EFH \overline{\wedge} E'F'H'$, und es geht auch noch die Gerade FF' durch S. Folglich ist $GHF \overline{\wedge} G'H'F'$, weil die Verbindungslinien der Ecken dieser Dreiecke GG', HH', FF' durch einen Punct S gehen, mithin schneiden sich ihre entsprechenden Seiten auf einer Geraden, nämlich in den Puncten ACD, d. h. es bestimmen qq' auf r denselben Punct D. Hiermit ist bewiesen, dass durch drei Puncte und die Bestimmung, welche von ihnen zugeordnete sein sollen, der vierte harmonische völlig bestimmt ist, wenn noch erwiesen wird, dass einander als Ecken zugeordnete Puncte und die durch die Nebenseiten zugeordneten völlig gleichberechtigt sind. Dies geschieht durch den Nachweis, dass sich durch die Puncte $ABCD$ ein Vierseit legen lässt, von dem zwei Ecken in BD liegen, und von dem zwei Nebenseiten durch BD gehen.



Das Vierseit $lmno$ hat auf r die Ecken AC, und die Nebenseiten p und q bestimmen auf r die Puncte B und D. Die beiden Vierseite $nopq$ und $uvpq$ haben beide $B'D'$ zu Ecken und die

Nebenseite m des ersten und die Nebenseite r des zweiten geht durch A. Also gehen die beiden andern Nebenseiten EC bez. FC durch denselben Punct C' auf l, sie sind ein und dieselbe Gerade s. Es hat mithin das Vierseit $pquv$ Ecken in BD auf der Nebenseite r, und die anderen Nebenseiten l und s gehen durch A und C. Damit ist die Gleichberechtigung der beiden Paare zugeordneter Puncte erwiesen. — Der analoge Satz für harmonische Büschel erledigt sich von selbst durch den nachher zu beweisenden Satz: Jeder Büschel, der vier harmonische Puncte projicirt, ist harmonisch, und jede Gerade trifft einen harmonischen Büschel in harmonischen Puncten.

In der benutzten Figur liegen die Ecken des Vierseits $lmno$ auf einer Seite der Nebenseite r, die Sätze sind jedoch davon ganz unabhängig, weil im Beweis selbst von dieser zufälligen Eigenschaft kein Gebrauch gemacht wird. Will man noch einmal räumliche Anschauungen herbeiziehen, so überzeugt man sich leicht, dass man ein Vierseit so auf ein anderes projiciren kann, dass in Bezug auf zwei einander perspectiv entsprechende Nebenseiten in dem einen die Ecken alle auf einer Seite derselben liegen, in dem andern auf verschiedenen Seiten. Im Grunde ist eine Gerade in der projectiven Geometrie überhaupt eine einseitige Linie.

Liegen vier harmonische Puncte vier andern Puncten perspectiv, so sind diese auch harmonisch, oder wird ein Büschel von vier harmonischen Strahlen durch eine Gerade in vier harmonischen Puncten getroffen, so wird er von jeder Geraden in vier harmonischen Puncten getroffen. Ein singulärer Fall ist der, dass die zweite Gerade durch den Träger des Büschels geht, dann fallen die vier Schnittpuncte in einen zusammen. — Nimmt man zuerst an, die Puncte $ABCD$ und $A'B'C'D$, die perspectiv liegen, haben D gemein (man zeichne die einfache Figur selbst) und R sei der Punct, von dem $ABCD$ und $A'B'C'D$ gleichzeitig projicirt werden, so nehme man auf b, der Geraden RBB' einen Punct Q an, und verbinde ihn mit A und C. Die Verbindungslinien bestimmen auf der Geraden a, d. h. der Linie RAA' den Punct M, auf der Geraden c (RCC') den Punct N. Die Verbindungslinie MN muss durch D gehen, weil $ABCD$ als harmonisch angenommen sind. Verbindet man M mit C', N mit A', so schneiden sich diese Linien in einem Puncte Q'. Wird von ihm bewiesen, dass er auf b liegt, so ist es richtig, dass $A'B'C'D$ harmonische Puncte sind wegen des Vierseits $ac(NA')(MC')$. — Es sind MCC' und NAA' perspective Dreiecke, weil sich die

Verbindungslinien ihrer Ecken in einem Puncte D schneiden, folglich liegen die Schnittpuncte ihrer Seiten in einer Geraden, es liegen die Puncte RQQ' in b, w. z. b. w.

Nun falle D' nicht mit D zusammen, während $ABCD$ harmonisch sind und $ABCD \overline{\wedge} A'B'C'D'$ ist. Dann ziehe man die Gerade $A'D$, welche von dem die beiden Gebilde $ABCD$, $A'B'C'D'$ nach der Voraussetzung gleichzeitig projicirenden Büschel $abcd$ in $A'B''C''D$ getroffen wird. Dann sind $A'B''C''D$ nach dem eben bewiesenen Satze harmonische Puncte, und daraus folgt wieder, dass $A'B'C'D'$ harmonische Puncte sind. Die Art, wie vorhin der Punct Q gefunden wurde, lehrt, dass ein Büschel der vier harmonische Puncte projicirt, ein harmonischer Büschel in dem früher gegebenen Sinne ist, woraus weiter folgt, dass jeder harmonische Büschel von jeder Geraden in vier harmonischen Puncten getroffen wird.

Schneiden sich die Strahlen zweier Büschel $abcde$ . ., $a'b'c'd'e'$ . . paarweise auf einer Geraden, so heissen die Büschel perspectiv, die Gerade heisst die Perspectivitätsachse. Sind vier Strahlen eines Büschels harmonische, so sind auch die ihnen perspectiv entsprechenden Strahlen des andern Büschels harmonische. — Denn die Schnittpuncte beider mit der Perspectivitätsachse sind harmonische Puncte.

Aufgabe. Zu drei Elementen bei gegebener Zuordnung das vierte harmonische zu finden. — Sind die Elemente ABC Puncte, so projiciren wir sie von R aus durch die Strahlen abc, nehmen auf b einen Punct Q an, verbinden ihn mit A und C. Die Verbindungslinien bestimmen auf ac Puncte MN, deren Verbindungslinie auf der Geraden ABC den gesuchten Punct D bestimmt, der B zugeordnet ist. Sind die Elemente Strahlen abc, so schneide man sie durch eine Gerade in den Puncten ABC und verfahre wie vorhin.

Aufgabe. Vier Puncte, die nicht in einer Geraden liegen durch einen harmonischen Büschel zu projiciren. Die Puncte seien $AXCY$, AC sollen durch zugeordnete Strahlen projicirt werden. — Man nehme auf AC den Punct B an und construire den vierten harmonischen D. Der Schnittpunct von XB, YD ist der Träger eines der Aufgabe genügenden Büschels. Da B willkürlich auf AC genommen werden kann, so giebt es einfach unendlich viele der Aufgabe genügende Projectionscentren. Durch veränderte Zuordnung erhält man weitere Lösungen. Fällt X auf AC, so muss B X selbst sein, und die Projectionscentren liegen auf der Geraden YD. — Dualistisch gegenüber steht die

Aufgabe: Vier gerade Linien $axcy$, die nicht durch einen Punct gehen, durch eine Gerade harmonisch zu schneiden. — Durch den Schnittpunct (ac) lege man eine Gerade b und bestimme zu abc den vierten harmonischen Strahl d. Die Gerade durch die Schnittpuncte $(bx)(dy)$ entspricht der Aufgabe. Geht x durch ac, so muss x für b genommen werden, und es genügen alle Strahlen des linearen Strahlenbüschels der Aufgabe, dessen Träger der Punct (dy) ist.

Aufgabe. Auf einer Geraden g einen Punct P so zu bestimmen, dass g und die durch drei gegebene Puncte AXC gehenden Strahlen PA, PX, PC harmonische sind. — D sei der Schnittpunct von g mit AC, B der von D durch AC getrennte vierte harmonische, so liefert die Gerade BX auf g den gesuchten Punct. — Liegt X auf AC, so sind entweder $AXCD$ harmonische Puncte, und P kann auf g willkürlich gewählt werden, oder sie sind es nicht, und die Lösung der Aufgabe ist unmöglich. Dualistisch gegenüber steht die Aufgabe: Durch einen Punct G eine Gerade p zu legen, welche die Geraden $a\ x\ c$ in Puncten trifft, die mit G zusammen vier harmonische bilden.

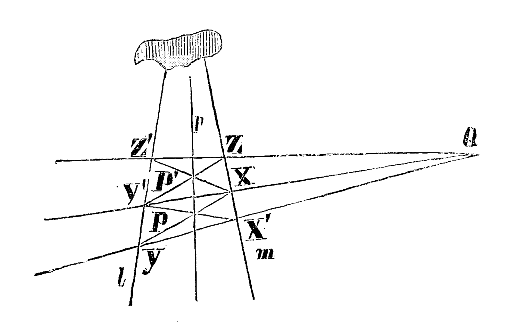
Man sagt auch: Zwei Puncte sind durch zwei gerade Linien harmonisch getrennt, wenn die Verbindungslinien dieser Puncte mit dem Schnittpuncte der beiden Geraden einen harmonischen Büschel bilden, oder wenn eine Gerade durch die beiden Puncte die beiden ersten Geraden in zwei Puncten trifft, die durch die gegebenen harmonisch getrennt sind. — Der Ort aller Puncte, die von einem gegebenen P durch zwei Gerade harmonisch getrennt sind, ist eine Gerade durch den Schnittpunct der gegebenen Geraden, man kann sie die Polare von P für das Geradenpaar nennen. Alle Geraden die von einer Geraden p durch zwei Puncte harmonisch getrennt sind, gehen durch einen Punct auf der Verbindungslinie der beiden Geraden, man kann ihn den Pol der Geraden p für das Punctpaar nennen.

In einem Vierseit sind zwei Nebenseiten durch die nicht auf ihnen liegenden Ecken harmonisch getrennt.

Schneidet man die Seiten $a\ b\ c$ eines Dreiecks ABC durch eine Gerade g (man zeichne die einfache Figur selbst), die a in S, b in R, c in Q trifft, und bestimmt man Q' so, dass $AQBQ'$ harmonische Puncte sind, so schneiden sich die Geraden $AS(s)$, $BR(r)$, CQ' in einem Puncte G. Die Gerade $CG(q')$ bestimmt den vierten harmonischen Punct Q' auf c, weil $q'g$ Nebenseiten des Vierseits $abrs$ sind. — Schneiden sich drei Transversalen srq' durch die Ecken eines Dreiecks ABC in einem Puncte G, und

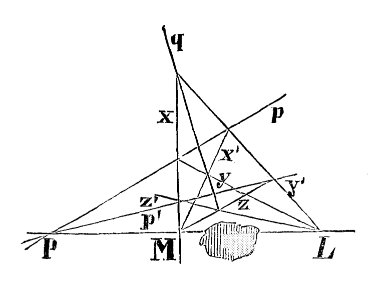
treffen $s\,r\,q'$ die Seiten des Dreiecks in den Puncten $S\,R\,Q'$, und zieht man noch die Gerade q, die von q' durch a und b harmonisch getrennt ist, und bestimmt diese auf c den Punct Q, so liegen $S\,R\,Q$ auf einer Geraden g.

Die wiederholte Anwendung dieser beiden sich dualistisch gegenüberstehenden Sätze giebt Anlass zu einer Configuration (Fig. 6, Taf. II). Verbindet man die Ecken eines Dreiecks ABC mit einem Puncte G durch die Geraden srq', die die Dreiecksseiten abc bez. in SRQ' treffen und ist q der Strahl durch C, der von q' durch a und b harmonisch getrennt ist, r' der Strahl, der von r durch ac, s' der Strahl, der von s durch bc harmonisch getrennt ist, und sind $AQBQ'$, $BSCS'$, $CRAR'$ harmonische Puncte, so liegen SRQ auf einer Geraden g, $R'S'Q$ auf einer Geraden g', $Q'SR'$ auf einer Geraden g'', $Q'RS'$ auf einer Geraden g''' und es gehen $q'r's'$ durch einen Punct G', qsr' durch G'', $rs'q$ durch einen Punct G'''. Die Puncte $ABCQQ'RR'SS'GG'G''G'''$ liegen neunmal zu je vieren, und viermal zu je dreien auf einer Geraden, und die Geraden $abcrr'qq'ss'gg'g''g'''$ gehen neunmal zu je vieren und viermal zu je dreien durch einen Punct.



Aufgabe. Durch einen Punct P eine Gerade p nach dem unzugänglichen Schnittpuncte zweier Geraden l und m zu ziehen.

Man ziehe durch P zwei Gerade, welche l und m in den Puncten XY, $X'Y'$ treffen, ziehe XY' und $X'Y$ bis sich diese Linien schneiden, etwa in Q, dann ziehe man eine Gerade QZZ', ziehe ZY', $Z'X$, welche Linien sich in P' schneiden. Dann ist PP' die gesuchte Linie p, weil zwei ihrer Puncte (P und P') und mithin alle von Q durch l und m harmonisch getrennt sind. Dualistisch hierzu ist die



Aufgabe: Auf einer Geraden p einen Punct P so zu bestimmen, dass er mit zwei Puncten L und M auf einer Geraden

liegt, wenn zwischen M und L ein unzugängliches Stück der Ebene liegt.

Man bestimme auf p zwei Puncte, welche mit M und L die Strahlen xy, $x'y'$ bestimmen, suche die Schnittpuncte von xy' und yx', die sich auf einer Geraden, etwa q, treffen. Von einem Puncte auf q ziehe man nach M und L zwei Strahlen z und z', bestimme die Schnittpuncte zy', $z'x$, welche auf einer Geraden p' liegen. Der Schnittpunct von p und p' ist der gesuchte Punct P, weil zwei durch ihn gehende Geraden (p und p') und mithin alle durch ihn gehende Geraden harmonisch von q durch L und M getrennt sind.

Einen speciellen Fall eines unzugänglichen Schnittpunctes bildet der uneigentliche oder unendlich ferne Punct zweier Parallelen. Sind zwei parallele Geraden gegeben, so kann man leicht mit dem Lineal eine dritte Parallele zu ihnen durch einen beliebigen Punct ziehen. Die Annahme, dass zwei Paare paralleler gerader Linien in der Construktionsebene gegeben seien, soll hier überall gemacht werden, weil nur unter dieser Annahme principiell lineare Aufgaben auch praktisch linear lösbar sind.

Wir nennen einen Punct C die Mitte zwischen AB, wenn er vom uneigentlichen Puncte der Geraden AB durch AB harmonisch getrennt ist. Die Mitte ist linear construirbar. Hierin liegt eine Massbestimmung auf einer Geraden, die auf dem harmonischen Verhältnisse und der Auszeichnung des uneigentlichen Punctes beruht. Wollte man sagen, die Mitte einer Strecke sei der Punct, der bei der Umkehrung der Strecke seine Lage nicht ändert, so würde man die Hypothese machen, dass die umgekehrte Strecke mit der ursprünglichen zur Deckung gebracht werden könne, überhaupt aber würde die Strecke wie ein fester Körper im Raume oder wenigstens in der Ebene als forttragbar angenommen werden, man würde also den Standpunct, den wir als rein geometrischen bezeichnet haben, verlassen. — Die Aufgabe, eine Strecke AC zu verdoppeln, d. h. einen Punct B auf der Geraden AC so zu bestimmen, dass C die Mitte zwischen AB ist, lässt sich mit dem Lineal lösen. — Man ziehe zu AC eine Parallele g, verbinde einen Punct P auf ihr mit A und C durch die Geraden a und c. Einen zweiten Punct L auf g verbinde man mit C durch eine Gerade h, die a in Q treffen möge. Durch Q lege man eine Parallele k zu g, die c in R treffen mag. Die Verbindungslinie b der Puncte LR bestimmt auf AC den gesuchten Punct B. — Der uneigentliche Punct von g und k und

der Schnittpunct C von h und c sind Ecken des Vierseits *ghkc*, dessen Nebenseiten ab durch A und B gehen.

In einem Parallelogramm $aa'bb'$ schneiden sich die beiden Nebenseiten, die eigentliche gerade Linien sind in der Mitte der Strecken, die auf ihnen durch die Ecken des Parallelogramms bestimmt werden (die Diagonalen halbiren sich). Denn die uneigentliche Gerade als dritte Nebenseite des Parallelogramms $aa'bb'$ bestimmt mit einer andern Nebenseite, etwa der Verbindungslinie c der Puncte $(ab')(a'b)$ auf der Nebenseite c', der Verbindungslinie $(ab)(a'b')$, vier harmonische Puncte, von denen einer ein uneigentlicher ist, so dass der Schnittpunct Q von cc' in der Mitte von $(ab)(a'b')$ liegt. Ebenso ist Q die Mitte zwischen $(ab')(a'b)$. — Die Gerade d, welche von der uneigentlichen Geraden durch bb' harmonisch getrennt ist, geht auch durch Q, zugleich auch durch die Mitten MM' der Strecken $(ab)(ab')$ und $(a'b)(a'b')$. In einem Parallelogramm gehen die Verbindungslinien der Mitten gegenüberliegender Seiten mit den beiden eigentlichen Nebenseiten durch einen Punct, und sind den Parallelogrammseiten bez. parallel.

Nennt man die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms als Strecken einander der Grösse nach gleich, so lassen sich auch Strecken auf verschiedenen, wenn nur einander parallelen Geraden mit einander der Grösse nach vergleichen, wovon erst später gesprochen werden soll. Es gehört aber zu den Eigenthümlichkeiten der Euklidischen Raumauffassung, dass in ihm die Massbestimmungen nicht dualistisch auftreten, worüber später zu sprechen ist.

Perspective Gebilde. *Gerade Punctreihen, die verschiedene Träger* g, g' *haben, heissen perspectiv, wenn die entsprechenden Puncte durch einen Strahlenbüschel* G *gleichzeitig projicirt (aufgenommen) werden.* Sie haben einen Punct, den Punct (g, g'), entsprechend gemein. Die Punctreihe kann continuirlich oder discontinuirlich sein. Man schreibt $ABCDEF\,.. \;\overline{\wedge}\; A'B'C'D'E'F'\,..$ worin AA', BB', CC'.. sich entsprechen. Durch zwei Paare entsprechender Puncte, unter denen sich der sich selbst entsprechende (gg') nicht befinden darf, ist das Perspectivitätscentrum, und folglich die perspective Beziehung bestimmt.

Strahlenbüschel, die verschiedene Träger GG' *haben, heissen perspectiv, wenn sie von einer Geraden* g *in entsprechenden Puncten getroffen werden, so dass entsprechende Strahlen sich auf* g *schneiden.* Sie haben einen Strahl (GG') entsprechend gemein. Der Büschel kann continuirlich oder discontinuirlich sein. Man

schreibt $abcdef.. \overline{\wedge}\ a'b'c'd'e'f'..$, wenn aa', bb', $cc'..$ die entsprechenden, die sich auf g schneidenden Strahlen sind. Durch zwei Paare entsprechender Strahlen (die den Strahl (GG') nicht enthalten dürfen) ist die Perspectivitätsachse g und damit die perspective Beziehung überhaupt bestimmt. — Im wörtlichen Sinne perspectiv können Strahlbüschel nur sein, wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Man sagt auch ein Strahlbüschel sei einer Punctreihe perspectiv, wenn die Strahlen $abcd..$ durch die entsprechenden Puncte $ABCD..$ gehen.

Aus den voraufgegangenen Betrachtungen folgt: *In perspectiv sich entsprechenden Gebilden (Büscheln oder Punctreihen) entsprechen harmonischen Elementen harmonische.*

Harmonische gleichartige Gebilde (entweder Büschel oder Punctquadrupel) auf verschiedenen Trägern sind einander perspectiv, und zwar doppelt perspectiv, wenn sie ein Element gemein haben. — Ist A der gemeinsame Punct der harmonischen Punctreihen $ABCD$, $AB'C'D'$, so lege man durch BB', DD' die Graden $b\,d$ und verbinde ihren Schnittpunct G mit A durch a. Der vierte harmonische Strahl c des Büschels $abcd$ ist völlig bestimmt, und muss durch C und C' gehen. G ist ein Perspectivitätscentrum für die harmonischen Punctreihen. Ein zweites, G' erhält man als Schnitt der beiden BD', DB' verbindenden Geraden. — Ist a der gemeinsame Strahl der beiden harmonischen Büschel $abcd$, $ab'c'd'$, und schneiden sich bb' in B, dd' in D, und trifft die Verbindungslinie g der Puncte BD a in A, so ist der vierte harmonische Punct C der Reihe $ABCD$ völlig bestimmt, durch ihn müssen c und c' gehen. Die Gerade g ist die Perspectivitätsachse der beiden Büschel. Eine zweite g' erhält man als Verbindungslinie der Schnittpuncte bd', $b'd$.

Sind drei gerade Punctreihen s, s', s'' einander paarweise so perspectiv (Fig. 7, Taf. III), dass sie einen Punct A entsprechend gemein haben, so liegen die drei Perspectivitätscentren $S\,S'\,S''$ auf einer Geraden. — Beweis. Die Punctreihen auf s, s', s'' seien bez. $ABC..$, $AB'C'..$, $AB''C''..$, so sind die Dreiecke $BB'B''$, $CC'C''$ einander perspectiv mit dem Perspectivitätscentrum A, folglich schneiden sich die Seiten paarweise in drei Puncten SS' S'' einer Geraden. Durch die Verbindungslinien je zweier Paare entsprechender Puncte sind die Perspectivitätscentren S, S', S'' vollständig bestimmt. — Es giebt einmal drei entsprechende Puncte $(DD'D'')$ in einer Geraden. Dualistisch hierzu ist der Satz: Sind drei Strahlenbüschel $SS'S''$ einander paarweise so

perspectiv, dass sie einen Strahl d entsprechend gemein haben, so gehen die drei Perspectivitätsachsen $s\,s'\,s''$ durch einen Punct A. — Man betrachte die perspectiven Dreiseite $bb'b''$, $cc'c''$.

Sind $abc\,..$, $a'b'c'\,..$ perspective Strahlbüschel (Fig. 8[a], Taf. III) mit den Trägern SS' die den gemeinsamen Strahl h haben, und deren Perspectivitätsachse g ist, so bilden je zwei entsprechende Strahlenpaare z. B. bb', cc' Vierseite von denen h, g Nebenseiten sind, und es geht die dritte Nebenseite, die $(b'c)\,(bc')$ verbindet, durch einen festen, von der Wahl des Strahlenpaares unabhängigen Punct M auf h, nämlich den Punct, der durch SS' von H, dem Schnittpuncte hg, harmonisch getrennt ist. — Der dualistische Satz (Fig. 8[b], Taf. III) lautet: Sind $ABC\,..$, $A'B'C'\,..$ perspective Punctreihen auf den Trägern s, s', die den Punct H entsprechend gemein haben, so bilden je zwei Paare entsprechender Puncte z. B. BB', CC' Vierecke, von denen H, G Nebenecken sind, und es liegt die dritte Nebenecke, der Schnittpunct von $(BC')\,(B'C)$ auf einer festen, von der Wahl der Paare BB', CC' unabhängigen Geraden, nämlich auf der Geraden m, die vom Perspectivitätscentrum G durch s und s' harmonisch getrennt ist.

Ist eine gerade Punctreihe $ABCD\ldots$ einer zweiten Reihe $A'B'C'D'\ldots$ und diese einer dritten $A''B''C''D''\ldots$ perspectiv, diese einer vierten etc., einer $(n+1)^{\text{ten}}$ $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}D^{(n)}\ldots$, so heisst die letzte der ersten projectiv ($\overline{\wedge}$).

Ist ein Strahlenbüschel $abcd\ldots$ einem zweiten $a'b'c'd'\ldots$ und dieser einem dritten $a''b''c''d''\ldots$ perspectiv, und dieser einem vierten etc., einem $(n+1)^{\text{ten}}$ $a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}d^{(n)}\ldots$, so heisst der letzte dem ersten projectiv ($\overline{\wedge}$).

Ist eins von zwei projectiven Gebilden einem dritten projectiv, so sind sie unter sich projectiv. Projective Gebilde können auf demselben Träger liegen.

Werden aus zwei projectiven Gebilden irgend vier Paare entsprechender Elemente herausgegriffen, und sind diese in dem einen Gebilde harmonische, so sind sie es auch in dem andern. — Denn dies ist in der Reihe projectiver Gebilde, aus deren Aufeinanderfolge die projectiven Gebilde definirt sind, für jedes einzelne Gebilde der Fall. Die harmonische Beziehung ist eine invariante in der projectiven Verwandtschaft.

Irgend zwei Quadrupel harmonischer Elemente sind einander projectiv. — Wir beweisen diesen Satz nur für Punctgebilde. $ABCD$ und $A''B''C''D''$ seien die harmonischen Punctreihen. Man verbinde A'' mit D und bestimme auf $(A''D)$ zwei Puncte $B'C'$ so, dass $A''B'C'D$ harmonisch sind. So ist nach früher Bewiesenem

$$ABCD \barwedge A''B'C'D \barwedge A''B''C''D'',$$
$$ABCD \barwedge A''B''C''D''.$$

Haben die beiden Gebilde einen gemeinsamen Träger, so projicire man erst $A''B''C''D''$ auf eine andere Gerade nach $A''B'''C'''D'''$. Dann ist

$$ABCD \barwedge AB'C'D''' \barwedge A''B'''C'''D''' \barwedge A''B''C''D'',$$

also
$$ABCD \barwedge A''B''C''D''.$$

Man hat in diesem Falle zwei Zwischenglieder, im allgemeinen Falle nur ein Zwischenglied nöthig. — Man nennt auch eine Punctreihe einem Büschel projectiv, wenn die Punctreihe durch einen dem Büschel projectiven Büschel aufgenommen, projicirt wird.

Zwei harmonische Gebilde sind einander in achtfacher Weise projectiv, denn man kann ein Element des einen Gebildes einem beliebigen Elemente des andern Gebildes entsprechen lassen, dann müssen sich die von ihnen bez. getrennten entsprechen. Von den beiden übrigen Paaren kann man aber wieder eins im ersten Gebilde einem beliebigen der beiden übrigen im zweiten Gebilde entsprechen lassen.

Sind auf einer Geraden die Punctpaare CD, $C'D'$, $C''D''$, bez. durch AB harmonisch getrennt, so ist $ABCDC'D' \ldots \barwedge AB DCD'C' \ldots$ Beweis (Fig. 9, Taf. III): Von einem Puncte P projicire man die auf der Geraden g liegenden Puncte $ABCDC'D' \ldots$ nach $A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}'\mathfrak{D}' \ldots$ auf $\mathfrak{g}$. Dann gehen $\mathfrak{C}D$, $\mathfrak{D}C$; $\mathfrak{C}'D'$, $\mathfrak{D}'C'$; ... paarweise durch denselben Punct Q, der von P auf der Geraden b $(PB\mathfrak{B})$ durch g und $\mathfrak{g}$ harmonisch getrennt ist. Auf b liegt er, weil er durch cd, $c'd'$, ... von A harmonisch getrennt ist. — Die eigenthümliche Paarung, dass CD, DC; $C'D'$, $D'C'$; ... entsprechend sind, nennt man Involution, sie wird uns später weiter beschäftigen.

Ebenso leicht beweist man den Satz (Fig. 10, Taf. III). Sind $ABXY$, ABX_1Y_1, ABX_2Y_2, .. harmonische Gebilde, so ist $XX_1X_2 \ldots \barwedge YY_1Y_2 \ldots$ — Es ist $P\ (YY_1Y_2 \ldots) \barwedge R\ (XX_1X_2 \ldots)$ weil sich die entsprechenden Strahlen dieser Büschel in den Puncten $QQ_1Q_2 \ldots$ der Geraden r (AD) schneiden, folglich ist $XX_1X_2 \ldots \barwedge YY_1Y_2 \ldots$ w. z. b. w.

Ueber den **Sinn** projectiver Gebilde. Durchläuft man die Elemente eines Elementargebildes (eines Strahlbüschels oder einer geraden Punctreihe) in einerlei Sinn, so durchlaufen auch die entsprechenden Elemente eines ihm projectiven Gebildes dieses in einerlei Sinn. Haben die Gebilde einen und denselben Träger, so ist der Sinn entweder der gleiche und die Gebilde heissen gleichstimmig, oder er ist der entgegengesetzte, und die Ge-

bilde heissen ungleichstimmig. Hat man zwei perspective Gebilde, und geht man in dem einen von Element zu Element in derselben Richtung (von links nach rechts oder umgekehrt) stetig fort, und geht man in dem andern Gebilde gleichzeitig von den entsprechenden Elementen zu entsprechenden fort, so bilden diese Elemente erstens ebenfalls eine stetige Aufeinanderfolge, und zweitens wird die Fortschreitungsrichtung an keiner Stelle gewechselt. Dasselbe muss demnach auch bei projectiven Gebilden stattfinden, weil diese Eigenschaft durch keine einzige Projection verloren geht. — Projective Gebilde auf demselben Träger sind daher entweder gleichstimmig, oder ungleichstimmig, tertium non datur. Sie können nicht etwa in einem Gebiete, einem Theile gleichstimmig, in einem andern ungleichstimmig sein. Ob zwei Gebilde auf demselben Träger gleichstimmig oder ungleichstimmig sind, wird durch die Lage dreier entsprechender Elemente vollständig bestimmt. Gleichviel ob das Gebilde eine gerade Punctreihe oder ein Strahlenbüschel ist, es wird immer als ein geschlossenes angesehen, d. h. der uneigentliche oder unendlich ferne Punct stellt einen continuirlichen Zusammenhang her zwischen den Puncten auf der einen Seiten des Punctes A und denen auf der andern Seite, einen Zusammenhang der der Vermittelung des Punctes A selbst nicht bedarf. So giebt es im Grunde gar nicht zwei Seiten in Bezug auf einen Punct A auf einer Geraden, es scheint jedoch nicht practisch dieses Wort zu beseitigen, man muss nur daran denken, dass bei Anwendung desselben eben der uneigentliche Punct eine Scheide bildet, die er in andrer Beziehung nicht ist. Dass man in einem Strahlbüschel durch Fortschreiten im gleichen Sinne zum ursprünglichen Strahl zurückkehrt, ist von selbst klar.

Fundamentalsatz der projectiven Geometrie. *Haben zwei projective Elementargebilde, Strahlbüschel oder gerade Punctreihen, drei Elemente entsprechend gemein, (die also auf demselben Träger liegen) so sind sie identisch oder congruent d. h. alle Paare entsprechender Elemente fallen zusammen.*

Sind die entsprechenden Elemente $\alpha\beta\gamma$, so sind die Gebilde zunächst gleichstimmig. Giebt es entsprechende Elemente $\xi\eta$ die nicht zusammenfallen, so muss es nicht zusammenfallende Elemente zwischen β und γ geben, wenn unter Elementen „zwischen $\beta\gamma$“ solche verstanden werden, die von α durch $\beta\gamma$ getrennt sind. Da nämlich das durch β und γ von irgend einem zwischen β und γ liegenden Elemente ε harmonisch getrennte Element ein sich selbst entsprechendes ist, wenn ε sich selbst entspricht, so würde

aus dem sich selbst Entsprechen aller Elemente zwischen $\beta\gamma$ das sich selbst Entsprechen aller Elemente überhaupt folgen. Nimmt man daher an, dass das etwa sich nicht selbst entsprechende Element ξ zwischen β und γ liege, so beschränkt man damit die Allgemeinheit der Untersuchung nicht. Das ξ entsprechende Element η liegt dann nach dem Satze von der Gleichstimmigkeit auch zwischen β und γ. Wir beweisen, dass die Annahme eines Paares sich entsprechender und nicht zusammenfallender Elemente zwischen β und γ absurd ist. — Verfolgen wir die Elemente in dem einen der projectiven Gebilde dem ξ angehört in der Richtung nach β, so folgen sich die entsprechenden Elemente von η an ebenfalls in der Richtung nach β stetig, und fallen nothwendig an einer bestimmten Stelle μ zum ersten Male zusammen, wo μ im äussersten Falle das Element β ist. Verfolgen wir die Elemente im ersten Gebilde stetig in der Richtung nach γ, so folgen sich die entsprechenden Elemente von η an ebenfalls stetig in der Richtung nach γ und mögen zum ersten Male in einem Element ν zusammentreffen, wo ν im äussersten Falle mit γ zusammenfällt. Die Elemente μ und ν sind also sicher vorhanden und liegen zwischen β und γ, wenn sie nicht auf diese fallen. Zwischen ihnen giebt es kein sich selbst entsprechendes Element. Darin aber liegt der Widerspruch. Denn ist α' das Element, das von α durch μ und ν harmonisch getrennt ist, so liegt α' zwischen μ und ν und entspricht sich selbst, weil in projectiven Verwandtschaften harmonischen Elementen harmonische entsprechen. Demnach können zwischen β und γ Elemente, die sich entsprechen und nicht zusammenfallen, nicht existiren, folglich auch nicht ausserhalb. Alle entsprechenden Elemente fallen zusammen, w. z. b. w.

Diesen Beweis des Fundamentalsatzes der projectiven Verwandtschaft zwischen Elementargebilden habe ich zum ersten Male in meiner Geometrie der Lage (Halle bei L. Nebert 1873) auf ein Axiom der Continuität gestützt, dass zwei im gleichen Sinne stetig auf demselben Träger gleitende Elemente, die einmal zusammentreffen, sicher einmal an einer bestimmten Stelle zum ersten Male zusammentreffen, etwa wie der grosse Zeiger einer Uhr einmal zwischen jeder Stunde mit dem kleinen zusammenfallen muss, und seitdem ist dieser Beweis von den Geometern acceptirt worden. Die Continuität folgt bei mir unmittelbar aus der Definition der Projectivität. Ergänzungen sind nöthig, (vgl. eine Arbeit des Herrn Schur in den math. Annalen Band 18 pag. 252) wenn die projective Verwandtschaft so definirt wird,

dass elementare Gebilde auf einander projectiv bezogen heissen, wenn je vier harmonischen Elementen vier harmonische entsprechen. Einer solchen Definition hängt, wie mir scheint, der Mangel an, dass sie die Möglichkeit solcher Beziehungen voraussetzt. In dem Buche des Herrn Rulf, Elemente der projectiven Geometrie nach Küpper (Halle bei L. Nebert 1889) werden Continuitätsbetrachtungen zum Beweise dieses Satzes nicht gebraucht, doch werden dort andere weit gehende Voraussetzungen gemacht. Schon dadurch, dass in diesem Werke eine gerade Punctreihe (in sich fest) fortgetragen werden kann, wird der Standpunct der reinen projectiven Geometrie verlassen.

Dem eben erwiesenen Fundamentalsatze kann die Form gegeben werden: *Durch drei Paare entsprechender Elemente ist eine projective Beziehung vollständig bestimmt. Drei Paare aber können vollkommen willkürlich gewählt werden.*

Denn ist $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\,..\barwedge\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\,..$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\,..\barwedge\alpha'\beta'\gamma'\delta''\varepsilon''\zeta''\,..$ so ist auch $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\,..\barwedge\alpha'\beta'\gamma'\delta''\varepsilon''\zeta''\,..$, und da die beiden Reihen drei Elemente entsprechend gemein haben, so muss δ'' mit δ', ε'' mit ε', ζ'' mit ζ',.. zusammenfallen.

Haben zwei projective Gebilde auf verschiedenen Trägern ein Element entsprechend gemein, so sind sie perspectiv. Beweis: Sind $ABCD\,..$, $AB'C'D'\,..$ projective Punctreihen, so projicire man vom Schnittpuncte $(BB')(CC')$ das Gebilde $ABCDE\,..$ nach $AB'C'D''E''\,..$, dann ist $AB'C'D'E'\,..\barwedge AB'C'D''E''\,..$, weil beide Gebilde $ABCDE\,..$ projectiv sind. Da die Gebilde $AB'C'D'E'\,..$, $AB'C'D''E''\,..$ drei Elemente entsprechend gemein haben, so sind sie congruent, es muss D' mit D'', E' mit E'',.. zusammenfallen, der projicirende Büschel nimmt die projectiven Punctreihen zugleich auf, die Punctreihen sind perspectiv. — Sind $abcde\,..$, $ab'c'd'e'\,..$ projective Büschel, deren Träger auf a liegen, so schneide man sie durch eine Gerade, die die Schnittpuncte bb', cc' verbindet. Durch die auf ihr durch die Strahlen $de\,..$ des ersten Büschels bestimmten Puncte mögen die Strahlen $d''e''\,..$ des zweiten Büschels gehen. So ist $ab'c'd'e'\,..\barwedge ab'c'd''e''\,..$, und da diese Gebilde drei Elemente entsprechend gemein haben, so fallen sie zusammen, es fallen d' und d'', e' und e'',. zusammen, es ist $abcde\,..\barwedge ab'c'd'e'\,..$ w. z. b. w.

Projective Gebilde auf verschiedenen Trägern sind einem und demselben dritten Gebilde perspectiv.

Sind $ABCD\,..K\,..$ auf g und $A'B'C'D'\,..K'\,..$ auf g' einander projective gerade Punctreihen (man zeichne die einfache Figur selbst), so lege man durch AK' eine Gerade g'' und pro-

jicire von einem Punct der Geraden (KK') g nach g'', so dass $AB''C''..K'..\,\overline{\wedge}\,ABC..K..$ ist. Dann haben die projectiven Gebilde $AB''C''..K'..$ und $A'B'C'..K'..$ den Punct K' entsprechend gemein, sind also einander perspectiv. Das Perspectivitätscentrum S' der letzten beiden Gebilde liegt auf der Geraden AA'. — Sind $abcd..k..$, $a'b'c'd'..k'..$ projective Büschel mit den Trägern G, G', so lege man durch den Punct (kk') eine Gerade s. Die Schnittpuncte dieser mit den Strahlen des Büschels G projicire man von dem Schnittpuncte G'' der Strahlen ak', so ist $G''\,\overline{\wedge}\,G$, weil diese Büschel den Strahl a entsprechend gemein haben. Es ist aber auch $G''\,\overline{\wedge}\,G'$, weil diese Büschel den Strahl k' entsprechend gemein haben. Die Perspectivitätsachse s' der beiden letzten Büschel geht durch den Schnittpunct aa'.

Liegen zwei projective Elementargebilde auf demselben Träger, so sind sie nur dann einem und demselben dritten Gebilde perspectiv, wenn sie ein Element entsprechend gemein haben, im andern Falle aber sind die beiden Gebilde je einem Gebilde perspectiv, die unter sich perspectiv sind.

Aufgabe. Zwei projective Punctreihen auf verschiedenen Trägern g, g' sind durch drei Paare ABC, $A'B'C'$ gegeben, man soll zu einem Puncte D des ersten Gebildes den entsprechenden Punct D' des zweiten Gebildes bestimmen. Man projicire von einem Puncte S auf AA' die Puncte $ABCD$ auf eine durch A' gehende Gerade g'' nach $A'B''C''D''$. Das Perspectivitätscentrum S' der Punctreihen $A'B''C''..$, $A'B'C'..$ ist durch die Geraden b' $(B'B'')$ und c' $(C'C'')$ bestimmt. Die Gerade $(S'D'')$ bestimmt auf g' den gesuchten Punct D'. Man sieht hieraus, dass ABC, $A'B'C'$ willkürlich gewählt werden können, es giebt allemal eine projective Beziehung in der die drei Paare entsprechende Puncte sind. — Liegen ABC auf derselben Geraden so construire man zu ABC erst ein perspectives Gebilde $AB''C''$, construire in diesem den D entsprechenden Punct D'', und dann zu D'' den in der Verwandtschaft $AB''C''..\,\overline{\wedge}\,AB'C'..$ zugehörigen Punct D', er ist auch der D entsprechende.

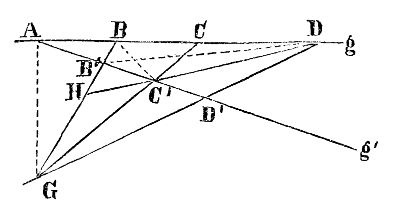
Aufgabe. Es sind zwei projective Strahlbüschel mit den Trägern G, G' durch drei Paare entsprechender Strahlen abc, $a'b'c'$ gegeben, es soll zu einem Strahl d im Büschel G der entsprechende d' des Büschels G' construirt werden. — Auf einer Geraden s durch den Schnittpunct aa' (A) bestimme man die Schnittpuncte $ABCD$ der Strahlen $abcd$ und projicire sie von einem Puncte G'' der Geraden a' durch Strahlen $a'b''c''d''$. Dann ist $a'b''c''d''\,\overline{\wedge}\,a'b'c'd'$. Die Perspectivitätsachse s' ist durch die

beiden Puncte $b'b''$, $c'c''$ bestimmt. Der Punct, den d'' auf ihr bestimmt, liefert mit G' verbunden den gesuchten Strahl d'.

Vertauscht man in einem Gebilde von vier Elementen $\alpha\beta\gamma\delta$ erst zwei mit einander, und dann die beiden andern, so erhält man ein dem ersten projectives Gebilde, so dass

$$\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \beta\alpha\delta\gamma \barwedge \gamma\delta\alpha\beta \barwedge \delta\gamma\beta\alpha \text{ ist.}$$

Wir beweisen den Satz nur für ein gerades Gebilde, weil er dann für einen Strahlenbüschel (den man durch eine beliebige Gerade schneiden kann) von selbst folgt. $ABCD$ sei das Gebilde auf g, welches von einem Puncte G aus projicirt wird. Den Büschel G schneide man durch eine Gerade g', welche durch A hindurchgeht, die Spuren der Strahlen auf ihr sind dann $AB'C'D'$. Nun projicire man von C' aus das Gebilde $ABCD$, so erhält man einen Strahlenbüschel, der auf GB die Spuren $B'BGH$ zurück lässt. Dieses gerade Gebilde projicirt man von D auf die Gerade g', so gehen die Strahlen durch die Puncte $B'AD'C'$, diese werden aber durch den Strahlenbüschel G auf die Puncte $BADC$ der Geraden g projicirt. Es ist also

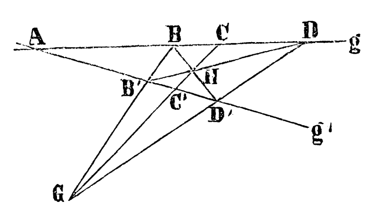


$$ABCD \barwedge AB'C'D' \barwedge B'BGH \barwedge B'AD'C' \barwedge BADC,$$

also $ABCD \barwedge BADC$, w. z. b. w.

Wenn man in einem Gebilde von vier Elementen $\alpha\beta\gamma\delta$ zwei mit einander vertauscht, und wenn dann das so entstandene Gebilde dem ersten projectiv ist, so ist es ein harmonisches Gebilde. Also wenn $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \alpha\delta\gamma\beta$ ist, so ist $\alpha\beta\gamma\delta$ ein harmonisches Gebilde.

Wir beschränken uns wieder auf ein gerades Gebilde. $ABCD$ auf der Geraden g sei die gerade Punctreihe. Von einem Puncte G aus projicire man $ABCD$ auf eine Gerade g' nach $AB'C'D'$. Dann ist $ABCD$ nach Voraussetzung projectiv $ADCB$, nach Construktion projectiv $AB'C'D'$. Letztere Gebilde aber sind perspectiv, weil sie den Punct A entsprechend gemein haben. Verbindet man also B mit D', D mit B', so muss durch den Schnittpunct H auch CC' hindurch gehen, welche Linie auch durch G geht. Also sind $GB'BHDD'$ Ecken eines Vierseits und $ABCD$ sind harmonische Puncte.



Die messende und rechnende Geometrie findet zu vier Puncten auf einer Geraden oder vier Strahlen eines Büschels eine Zahl, die der projectiven Verwandtschaft gegenüber eine Invariante ist, und die „Doppelverhältniss“ genannt wird. Für den Fall, dass diese Zahl —1 ist, kennt auch die reine Geometrie eine invariante Eigenschaft dieser vier Elemente, nämlich die harmonische Eigenschaft, die sich durch die Beziehung der Elemente zu einem Vierseit oder Viereck mit seinen Nebenseiten bez. Nebenecken ausspricht. Eine ähnliche rein geometrische Beziehung zwischen vier Elementen im allgemeinen Falle ist mir nicht bekannt. Um jedoch eine kurze Bezeichnung für vier gegebene Elemente, vier Puncte auf einer Geraden oder vier Strahlen in einem Büschel zu haben, wollen wir ein solches System einen „Wurf“ nennen, ein Name der von Staudt herrührt.

Aufgabe. Vier Puncte $AXCY$, die nicht in einer Geraden liegen, so zu projiciren, dass der projicirende Büschel einem gegebenen Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv ist. — Man nehme auf der Geraden AC den Punct B willkürlich an und bestimme einen vierten Punct D auf ihr so, dass $ABCD \overline{\wedge} \alpha\beta\gamma\delta$ ist. Der Schnittpunct BX, DY ist ein Projectionscentrum, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Später zeigt sich, dass der geometrische Ort der Projectionscentren eine Curve zweiter Ordnung ist. Ausserdem kann $ABCD$ dem Wurf $\alpha\beta\gamma\delta$ auf sechs verschiedene Weisen zugeordnet werden. Unter den vierundzwanzig Vertauschungen der $ABCD$ sind immer je vier sich selbst projectiv, nämlich die durch Vertauschung zweier Elemente und Vertauschung der beiden andern auseinander entstehen, so dass nur sechs wesentlich verschiedene Zuordnungen übrig bleiben. — Liegen die Puncte AXC in einer Geraden, so ist der geometrische Ort der der Aufgabe genügenden Projectionscentren je eine Gerade, für jede der sechs Zuordnungen eine andere.

Dualistisch gegenüber steht die Aufgabe: Vier gerade Linien $axby$, die nicht durch einen Punct gehen, durch eine Gerade g so zu schneiden, dass die Schnittpuncte einem gegebenen Wurfe projectiv sind. Später zeigt sich, dass für jede Wahl der Zuordnung die Mannigfaltigkeit der der Aufgabe genügenden Geraden g einen Büschel zweiter Ordnung bilden.

Zwei projective Gebilde, die nicht ganz zusammenfallen, können nur zwei Elemente entsprechend gemein haben. Die Aufgabe, die sich selbst entsprechenden Elemente zu finden, ist von der zweiten Ordnung, und kann nicht mit dem Lineal allein gelöst werden. Wohl aber lässt sich die Aufgabe lösen: Von

zwei projectiven Gebilden auf demselben Träger sind drei Paare entsprechender Elemente gegeben, darunter ein sich selbst entsprechendes, man soll das zweite sich selbst entsprechende Element bestimmen. 1. Lösung für die Punctreihe (Fig. 11, Taf. III). Die Gebilde auf der Geraden s seien durch die drei Paare MAB, $MA'B'$ gegeben. Durch den sich selbst entsprechenden Punct M legen wir eine Gerade s'' und projiciren auf sie von einem Puncte S aus das Gebilde MAB.. nach $MA''B''$.., dann ist wegen des entsprechend gemeinen Punctes M $MA''B''.. \overline{\wedge} MA'B'..$ Das Perspectivitätscentrum S' wird durch die Geraden $(A''A')$ $(B''B')$ bestimmt. Der gemeinsame Strahl n der perspectiven Büschel SS' bestimmt auf s den zweiten gemeinsamen Punct N der Gebilde MAB.., $MA'B'$.. Geht die Gerade n durch M, so giebt es nur einen sich selbst entsprechenden Punct. Die Projectivität heisst dann eine parabolische. 2. Lösung für den Strahlbüschel. Die Büschel mit dem Träger S seien $mabc$.., $ma'b'c'$.. Auf dem sich selbst entsprechenden Strahle m wähle man einen Punct S'' und projicire von ihm aus die Schnittpuncte $MABC$.. der Strahlen $mabc$.. mit einer Geraden s. Der Büschel S'' ist dem Büschel wegen der entsprechend gemeinen Strahlen m perspectiv. Die Perspectivitätsachse der beiden Büschel sei s'. Der Schnittpunct N der Geraden ss' bestimmt den zweiten sich selbst entsprechenden Strahl der Büschel $mabc$.., $ma'b'c'$.. Fällt N auf m, so giebt es nur einen gemeinsamen Strahl; die Projectivität ist eine parabolische. (Fig. 12, Taf. III).

Projective Punctreihen heissen einander ähnlich, wenn die uneigentlichen Puncte der Reihen einander entsprechen.

Projicirt man (Fig. 13) von zwei Puncten U und V einer Geraden s die Puncte ABC einer Geraden t, so ist $U(ABCQ) \overline{\wedge} V(ABCQ)$, wenn Q der Schnittpunct (st) ist und $U(ABC..)$ in leicht verständlicher Weise den Büschel $UA, UB, UC,..$ bedeutet, und legt man durch die Puncte AC die Geraden g, g', die sich in einem Puncte W auf s schneiden. Nennt man weiter β den Schnittpunct $g(UB)$, γ den Schnittpunct $g(UC)$, α' den Schnittpunct g' (VA); β' den Schnittpunct $g'(VB)$, so ist $A\beta\gamma W \wedge ABCQ \wedge \alpha'\beta'CW$, $A\beta\gamma W \overline{\wedge} \alpha'\beta'CW$; und nennt man das Perspectivitätscentrum der letzten Reihen S, so schneiden sich die Geraden $A\alpha'$, $\beta\beta'$, γC in einem Puncte S, oder die Puncte $\beta S\beta'$ liegen auf einer Geraden.

Nennen wir ein Sechsecksechsseit oder Sechsseitsechseck eine Figur die sechs Ecken und sechs Seiten hat, auf jeder Seite zwei Ecken, durch jede Ecke zwei Seiten, die man wohl auch ein einfaches Sechseck nennt, die aber nicht in zwei Dreiecke

zerfallen soll, so lässt sich der bewiesene Satz, ein specieller Fall des berühmten Pascal'schen Satzes, so aussprechen:

Liegen die sechs Ecken $AWCUBV$ eines Sechsecksechsseits zu je dreien auf zwei Geraden $s t$, so liegen die Schnittpuncte gegenüberliegender Seiten AV, UC; BV, WC; BU, WA auf einer Geraden.

Dies ist der Satz, der auf Seite 10 bei der Behandlung mehrfach perspectiver Dreiecke voraufgenommen wurde.

Den Beweis des dualistischen Satzes, dass *die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines Sechsseitsechsecks sich in einem Puncte schneiden, wenn die Seiten zu je dreien durch zwei Puncte gehen,* unterdrücke ich, weil er sich als ein specieller Fall des später zu beweisenden Brianchon'schen Satzes von selbst ergiebt, empfehle aber die Ausführung des Beweises an dieser Stelle zur Uebung in der Anwendung des Princips der Dualität.

Lehrsatz. Ist (Fig. 14, Taf. III)

$$\alpha\beta\gamma\delta \barwedge ABCD \barwedge AB'C'D \barwedge AB''C''D, \ldots$$

so ist

$$BB'B'' \ldots \barwedge CC'C'' \ldots$$

Es sei $ABCDB' \ldots \doublebarwedge A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{B}' \ldots$ mit dem Perspectivitätscentrum P, und es treffe $B\mathfrak{C}$ den Strahl PD in M. Dann ist $B(A\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) \barwedge DPM\mathfrak{D} \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$. Projicirt man $A\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}$ von B' aus, so geht $B'\mathfrak{C}'$ auch durch M, weil $DP\mathfrak{D}$ festbleiben und $DPM\mathfrak{D}$ $\barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ ist. Also ist

$$BB'B'' \ldots \doublebarwedge \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}'' \ldots \doublebarwedge CC'C'' \ldots$$

$$BB'B'' \ldots \barwedge CC'C'' \ldots$$

w. z. b. w.

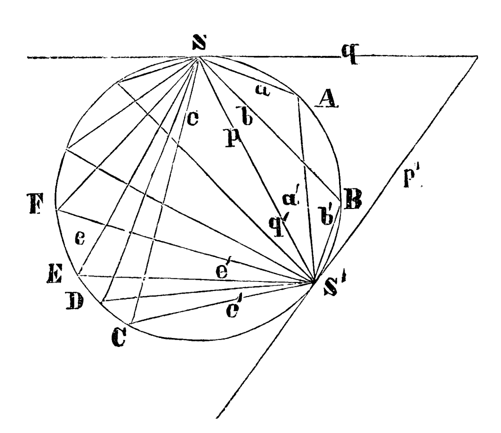
Lehrsatz. Sind die Gebilde $ABXY$, $ABX'Y'$, $ABX''Y'' \ldots$ dem Wurf $\alpha\beta\gamma\delta$ perspectiv, und sind $CDUV$, $CDU'V'$, $CDU''V'' \ldots$ demselben Wurf projectiv, und ist $XX'X'' \ldots \barwedge UU'U'' \ldots$, so ist auch $YY'Y'' \ldots \barwedge VV'V'' \ldots$ Denn nach dem vorigen Satze ist $YY'Y'' \ldots \barwedge XX'X'' \ldots$ und $VV'V'' \ldots \barwedge UU'U'' \ldots$, folglich ist $YY'Y'' \ldots \barwedge VV'V'' \ldots$ w. z. b. w.

Einige weitere Erzeugungen projectiver Gebilde aus projectiven, die in der rechnenden Geometrie dem Satze entsprechen, dass die linearen Substitutionen eine Gruppe bilden, werden bei der Behandlung der Kegelschnittbüschel gefunden werden.

Kapitel II.

Gebilde zweiter Ordnung, hergestellt aus realen Elementen. Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz. Aufgaben zweiten Grades.

Dass man continuirliche Punctreihen, auch wenn sie nicht gerade sind, zu einem continuirlichen Zuge, zu einer Curve in der Vorstellung zusammenfassen könne, ist auf Grund der Intuition ohne weiteres zuzugeben. Es wird aber an den Geometer auch die Forderung gestellt, dass er continuirliche Strahlenreihen als eine zusammenhängende Folge, als einen Büschel (höherer Ordnung) vorstellen, sie in einem solchen zusammenfassen könne. Bei dem linearen Strahlbüschel, dessen Strahlen alle durch einen Punct gehen, wird dies auf Grund der Intuition sofort zugestanden. Bei höheren Strahlbüscheln aber kann man den Continuitätsbegriff so fassen, dass Strahlen continuirlich aufeinander folgen, wenn sie auf jeder Geraden continuirliche Punctfolgen bestimmen, wobei es nicht nöthig ist, dass die Schnittpuncte die Gerade ganz bedecken, wenn sie nur eine Strecke continuirlich ausfüllen. Die Vorstellung wird am meisten dadurch unterstützt, dass sich die Strahlen eines Büschels höherer Ordnung, wie wir hier wenigstens für die Büschel zweiter Ordnung sehen werden, in continuirlicher Folge auf die Puncte einer continuirlichen Curve stützen.

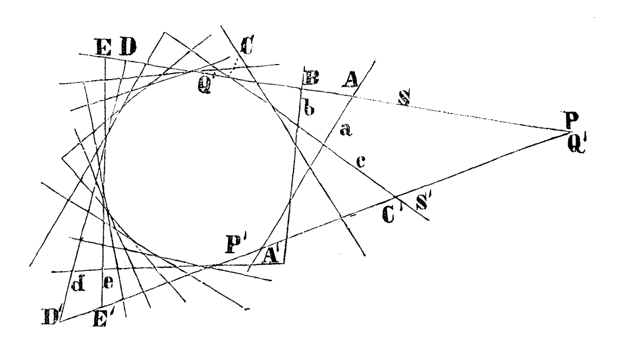


Die Durchschnittspuncte entsprechender Strahlen zweier projectiven nicht concentrischen und nicht perspectiven Strahlenbüschel bilden eine Aufeinanderfolge von Puncten (einen geometrischen Ort), welche man eine Punctreihe oder Curve zweiter ($K^{(2)}$) Ordnung nennt.

Keine Punctreihe erster Ordnung hat mit einer Punctreihe zweiter Ordnung mehr als zwei Puncte gemein, wenn sie nicht ganz in die Curve fällt. — Denn die beiden erzeugenden Strahlenbüschel bestimmen auf jeder Geraden zwei projective nicht perspective gerade Gebilde,

welche nicht mehr als zwei Puncte entsprechend gemein haben können, wenn sie nicht ganz zusammenfallen. Das kann nur statt haben, wenn die Büschel perspectiv sind, in welchem Falle die Curve in ein Geradenpaar ausartet, nämlich in die Perspectivitätsachse und den gemeinsamen Strahl der Büschel.

Die Verbindungslinien entsprechender Puncte zweier projectiven, nicht auf derselben Geraden und nicht perspectiv liegenden



geraden Gebilde in einer Ebene bilden eine Aufeinanderfolge von Strahlen, welche man einen **Strahlenbüschel zweiter Ordnung** ($B^{(2)}$) nennt.

Kein Strahlenbüschel erster Ordnung hat mit einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung mehr als zwei Strahlen gemein. — Denn die beiden erzeugenden projectiven Geraden bestimmen mit jedem Puncte zwei projective nicht perspective Strahlenbüschel, welche nicht mehr als zwei Strahlen entsprechend gemein haben können. Sind die gegebenen geraden Punctreihen perspectiv, so zerfällt der Büschel in zwei lineare, nämlich in die Büschel deren Träger einmal das Perspectivitätscentrum der beiden Gebilde, und zweitens der Schnittpunct der beiden gegebenen Geraden ss' ist. — In allgemeinen Sätzen über Curven zweiter Ordnung muss das Geradenpaar, selbst eine Gerade doppelt gezählt, mit zu den Curven zweiter Ordnung gerechnet werden, aber man pflegt diesen Fall doch als einen singulären, die Curve als eine ausgeartete zu bezeichnen. Ebenso ist das Zerfallen eines Büschels zweiter Ordnung in zwei lineare ein singulärer Fall.

Sieht man sich die Zeichnungen an, so springt ein Unterschied zwischen Curve und Büschel in die Augen, der, wenigstens in Bezug auf die Darstellung der Figuren durch Zeichnungen die vollkommene Dualität etwas durchbricht. Das erste Gebilde, die Curve, ist durch einen continuirlichen Zug dargestellt. Die Dar-

stellung ist nun mit demselben Mangel behaftet wie die der geraden Linie, dass der Zug eine gewisse Breite besitzt. Es wird Niemand in der Forderung etwas Anstössiges erblicken, dass die Schnittpuncte continuirlich gegebener Curven als bestimmt gegebene anzusehen seien. Hingegen gelingt es nicht, einen continuirlichen Strahlenbüschel durch eine Zeichnung darzustellen (auch nicht den linearen, doch macht sich in diesem Falle der Mangel weniger fühlbar) und die Forderung, gemeinsame Strahlen continuirlicher Büschel unmittelbar als bestimmt anzusehen, pflegt nicht gestellt zu werden, sondern ihre Construktion wird als eine Aufgabe betrachtet. Fragt man nach neuen Construktionsmitteln, Aufgaben höherer Ordnung zu lösen, so sucht man sie bei den Curven, nicht bei den Büscheln. Dass aber im Princip die Dualität erhalten bleibt, so lange es sich eben nicht um Construktionen handelt, wird die Folge lehren. Die Herstellung einer Curve zweiter Ordnung in ihrer ganzen Continuität mit dem Lineal ist freilich immer eine transcendente Aufgabe, aber mit einer einzigen solchen Curve, die man als gegeben ansieht, ohne nach den Mitteln zu fragen, wie sie continuirlich hergestellt ist, lassen sich, wie Steiner gezeigt hat, alle Aufgaben zweiten Grades lösen.

Die Träger der beiden einen Büschel zweiter Ordnung $(B^{(2)})$ erzeugenden geraden Punctreihen gehören mit zu dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung, weil der beiden gemeinsame Punct mit den ihm auf beiden Geraden entsprechenden Puncten Strahlen bestimmt, welche mit jenen erzeugenden zusammenfallen.

Die Centren der eine Curve zweiter Ordnung $(K^{(2)})$ erzeugenden Strahlenbüschel gehören mit zur Curve zweiter Ordnung, weil der beiden gemeinsame Strahl die ihm in beiden Büscheln entsprechenden in jenen Centren schneidet.

Die Centren der beiden Strahlenbüschel seien S und S', so giebt es auf jedem Strahle a durch S noch einen zweiten Punct der Curve zweiter Ordnung $(K^{(2)})$, nämlich den Punct A, welcher durch den entsprechenden Strahl a' des Büschels S' auf a bestimmt wird.

Ausgenommen ist jedoch je ein Strahl durch S und S', nämlich der, welcher dem gemeinsamen Strahle entspricht. Nennen wir den gemeinsamen Strahl als Strahl von S p, und den entsprechenden p', und als Strahl von S' q' und den entsprechenden q, so haben p' und q nur einen Punct mit der Punctreihe zweiter Ordnung gemein, und sie heissen deshalb Berührungsstrahlen oder Tangenten.

Die Träger der beiden $B^{(2)}$ erzeugenden Punctreihen seien s und s', so geht durch jeden Punct A auf s noch ein zweiter Strahl des Büschels zweiter Ordnung, nämlich der Strahl a, welcher durch den entsprechenden Punct A' auf s' bestimmt wird.

Ausgenommen sind jedoch die Puncte Q und P', die dem Schnittpuncte von ss' projectiv entsprechen. Diese Puncte heissen Stützpuncte des Büschels $B^{(2)}$, und zwar ist Q der Stützpunct des Strahles s und P' der Stützpunct des Strahles s' des Büschels zweiter Ordnung.

Curven und Büschel zweiter Ordnung sind unicursale Gebilde, d. h. durch stetiges Verfolgen der Puncte der Curve oder der Strahlen des Büschels gelangt man schliesslich zum Anfangspuncte oder Anfangsstrahle zurück, wie aus der Erzeugung unmittelbar hervorgeht. Die Curven werden klassificirt in Ellipsen, die keinen uneigentlichen Punct besitzen, in Hyperbeln, die zwei uneigentliche Puncte besitzen, und Parabeln, die von der uneigentlichen Geraden berührt werden, nur einen uneigentlichen Punct besitzen. Spricht man bei der Hyperbel von Zweigen, so bilden die uneigentlichen Puncte die Grenze der Zweige, bezeichnen wir sie aber als unicursal, so bilden gerade die uneigentlichen Puncte die Verknüpfung der Zweige.

Die Aufgabe, auf einem Strahle eines der beiden $K^{(2)}$ erzeugenden Büschel den zweiten Schnittpunct mit $K^{(2)}$ zu finden, fällt mit der schon gelösten Aufgabe zusammen: Sind zwei projective Strahlbüschel (durch drei Paare entsprechender Strahlen) gegeben, zu einem Strahle des einen Büschels den entsprechenden des andern zu bestimmen.

Die dualistische Aufgabe, durch einen Punct einer der beiden einen Büschel zweiter Ordnung $B^{(2)}$ erzeugenden geraden Punctreihen den zweiten Strahl von $B^{(2)}$ zu finden, fällt mit der Aufgabe zusammen: Sind zwei projective Punctreihen (durch drei Paare entsprechender Puncte) gegeben, zu einem Puncte der ersten Reihe den entsprechenden der andern zu finden.

Die Aufgabe, auf einer Geraden g durch den Schnittpunct A der entsprechenden Strahlen aa' der $K^{(2)}$ erzeugenden Büschel S, S' den zweiten Punct der Curve $K^{(2)}$ zu bestimmen, ist auch schon gelöst, denn die erzeugenden Büschel bilden auf g zwei projective Gebilde, von denen ein sich selbst entsprechender Punct gegeben ist. Der zweite sich selbst entsprechende Punct, dessen Construktion auf Seite 29 gelehrt wurde, ist der gesuchte. Wir ziehen aber durch den Punct A eine zweite Gerade g', und gelangen dadurch, dass wir die Curvenpuncte beider Geraden zu-

gleich finden, zum Pascal'schen Satze, der eine besonders elegante und sich dem Gedächtniss leicht einprägende Form der Lösung unserer Aufgabe ist.

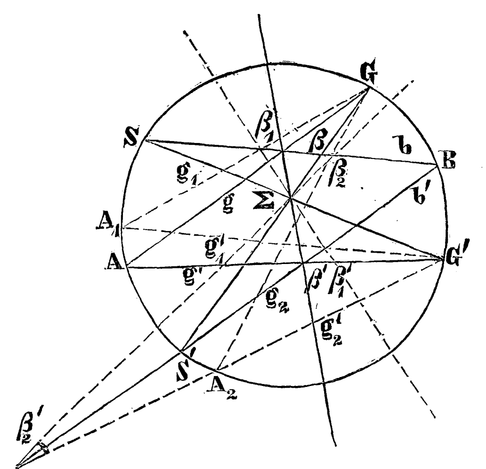
(Fig. 15[a] und Fig. 15[b], Taf. IV.) Auf der Geraden g bestimmt der Büschel $S(ABC..)$ die Punctreihe $A\beta\gamma..$, auf der Geraden g' bestimmt der S projective Büschel $S'(ABC..)$ die Punctreihe $A\beta'\gamma'..$, und es ist $A\beta\gamma.. \overline{\wedge} A\beta'\gamma'..$ mit dem Perspectivitätscentrum Σ. Die Verbindungslinien $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ bestimmen Σ. Jede Gerade durch Σ bestimmt auf g und g' ein Paar von Puncten etwa λ und λ', deren Verbindungslinien mit S und S' entsprechende Strahlen der Büschel SS' sind. Der Strahl $\Sigma S'$ bestimmt auf g den Punct G. Der Strahl SG entspricht folglich im Büschel S' dem Strahl $S'\Sigma G$ und folglich ist G der Punct der Curve $K^{(2)}$, den g mit ihr gemein hat. Der Strahl $S\Sigma$ liefert ebenso auf g' den Punct G', den g' neben A noch mit $K^{(2)}$ gemein hat.

Satz des Pascal. In dem Sechsecksechsseit $SBS'GAG'$, dessen Seiten $SB(b)$, $BS'(b')$, $S'G(m)$, $GA(g)$, $AG'(g')$, $G'S(n)$ sind, schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten in drei Puncten einer Geraden, nämlich bg in β, $b'g'$ in β' und mn in Σ. Wir nennen diese Gerade eine Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits. Die Figur 15[b] lehrt, dass der Satz richtig bleibt, wenn die eine Seite des Sechsecksechsseits eine Tangente ist. Der Punct B ist auf S gefallen, und man muss ihn als Ecke doppelt zählen, wenn man die Figur ein Sechseck nennen will. Wollte man diesen Fall einfach als Grenzfall des allgemeinen als bewiesen ansehen, so möchten sich dagegen in Bezug auf Strenge Bedenken erheben lassen.

Es muss beachtet werden, dass der Pascal'sche Satz hiermit noch nicht allgemein erwiesen ist, weil die beiden Ecken S S' des Sechsecksechsseits die Centren der $K^{(2)}$ erzeugenden Strahlbüschel sind, und als solche vor andern auf $K^{(2)}$ liegenden Ecken vorläufig noch ausgezeichnet sind. Die Befreiung des Beweises von dieser Besonderheit geschieht mittels des Satzes: *Die Puncte einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ werden von irgend zweien unter ihnen durch projective Büschel projicirt.*

Um dies nachzuweisen, ziehen wir durch den Punct G eine Schaar von Geraden $g_1 g_2 g_3 \ldots$ (in der umstehenden Figur ist nur g_1 gezeichnet) und durch G' eine Schaar $g_1' g_2' g_3' \ldots$, welche sich paarweise in den Puncten $A_1 A_2 A_3 \ldots$ der Curve $K^{(2)}$ schneiden. Ersetzt man dann in dem Sechsecksechsseit $SBS'GAG'$, für welches der Pascal'sche Satz bewiesen ist, die Ecke A durch A_1 oder $A_2 \ldots$, so gilt für jedes solche Sechsecksechsseit der Satz

des Pascal, weil die Ecken SS' in jedem derselben dieselbe Stelle und Bedeutung einnehmen. Schneidet aber g_1 die Gerade b in β_1, g_2 die Gerade b in β_2, g_3 in β_3 und schneidet g_1' die Gerade b' in β_1', g_2' in β_2' etc., so liegen immer die drei Puncte $\beta\Sigma\beta'$, $\beta_1\Sigma\beta_1'$, $\beta_2\Sigma\beta_2'\ldots$ in einer Geraden, also die Gebilde $\beta\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$, $\beta'\beta_1'\beta_2'\beta_3'\ldots$ sind perspectiv, und daher bilden die sie projicirenden Geraden $gg_1g_2g_3\ldots$, $g'g_1'g_2'g_3'\ldots$ projective Büschel. Hieraus folgt:



Die Strahlenbüschel $gg_1g_2\ldots$ und $g'g_1'g_2'\ldots$, welche von zwei willkürlichen Puncten GG' einer Curve zweiter Ordnung die übrigen Puncte $AA_1A_2\ldots$ projiciren, sind einander projectiv, w. z. b. w.

Die Ecken SS' haben also in dem Pascal'schen Satze nichts vor andern voraus, weil jedes andere Paar von Puncten ebenso zu Centren von projectiven, $K^{(2)}$ erzeugenden Strahlenbüscheln gemacht werden kann. Ein Pascal'sches, d. h. ein einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenes Sechsecksechsseit, wird auch hexagramma mysticum genannt.

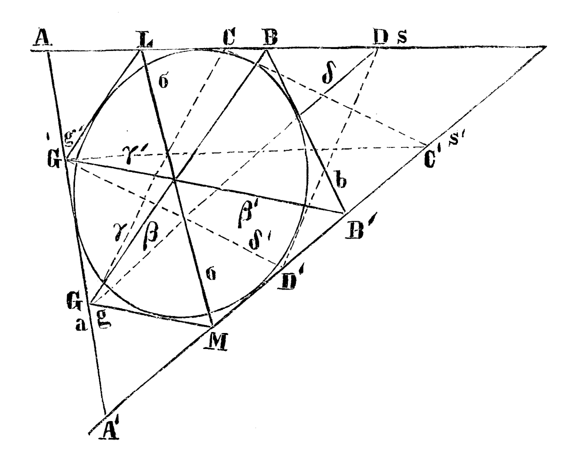
Sechs Puncte 1 2 3 4 5 6 können auf $1.2.3.4.5.6$ verschiedene Arten in eine Reihe geordnet werden, und jeder solchen Reihenfolge entspricht ein Sechsecksechsseit, welches durch Verbindung je zweier auf einander folgender Puncte der Reihe entsteht. Aber die Folgen, welche durch cyklische Vertauschung aus einander hervorgehen, also je sechs geben dieselbe Figur, und die Folgen, die Umkehrungen von einander sind, wie 1 2 3 4 5 6 und 6 5 4 3 2 1 geben ebenfalls dasselbe Sechsecksechsseit. Die Zahl aller möglichen Anordnungen ist demnach durch 2.6 zu dividiren, wenn man die haben will, die verschiedene Figuren liefern, und es giebt $3.4.5 = 60$ verschiedene Sechsecksechsseite aus sechs Puncten. Es giebt also sechzig verschiedene Pascal'sche gerade Linien p zu sechs Puncten auf einer Curve $K^{(2)}$. Die Configuration derselben wollen wir später wenigstens kurz besprechen. Dass aus sechs Puncten ein Pascal'sches Sechs-

ecksechsseit gebildet werden kann, ist die lineare Bedingung dafür, dass die sechs Puncte auf einer Curve zweiter Ordnung liegen. —

Nun hierzu die dualistischen Sätze.

Aufgabe. Den Strahl g des Büschels $B^{(2)}$ durch den Punct G auf a, und den Berührungspunct auf a zu construiren.

Auf der Geraden a (welche A und A' verbindet) wählen wir noch einen zweiten Punct G'. Dann bestimmen die Puncte



$ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ auf s und s', von denen die drei ersten Paare gegeben sein mögen, projective Strahlenbüschel nämlich $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, $\alpha\beta'\gamma'\delta'\ldots$, die perspectiv sind, weil sie den Strahl a entsprechend gemein haben. Um diejenige Gerade σ zu finden, auf der sich alle Paare entsprechender Strahlen $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'\ldots$ schneiden, brauchen wir nur die Verbindungslinie der beiden Schnittpuncte $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ zu construiren, sie ist die gesuchte Linie σ.

Um nun zunächst zu einem beliebigen Punct D auf s den entsprechenden D' auf s' und den durch D gehenden Strahl des Büschels $B^{(2)}$ zu finden, suchen wir den Schnittpunct des Strahles δ durch G und D mit σ, dieser bestimmt dann mit G' den Strahl δ' und dieser bestimmt D'. Die Gerade $DD'(d)$ ist der gesuchte Strahl des Büschels.

Ist D der s und s' gemeinsame Punct, so fällt d mit s' zusammen und D' ist der Stützpunct auf s', woraus sich das Mittel ergiebt, diesen Stützpunct zu construiren.

Bestimmt man auf s und σ den gemeinsamen Punct L, so bestimmt dieser mit G einen Strahl λ und mit G' den Strahl g'. Aber

λ und g' sind ein Paar entsprechender Strahlen durch G und G', weil sie sich auf σ schneiden. Sucht man nun den Schnittpunct von g' mit s', etwa L', so bestimmen L und L' den Strahl g', welcher dem Büschel $B^{(2)}$ angehört.

Der Strahl g von $B^{(2)}$ durch G wird ebenso durch den Punct, welchen s' mit σ gemein hat, bestimmt. Der Schnittpunct von s und g werde mit M bezeichnet.

Satz des Brianchon. *Sind die Seiten eines Sechsseitsechsecks Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung, so gehen die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punct.*

Zur Festlegung des Begriffes gegenüberliegender Seiten und Ecken diene Folgendes. Hat man sechs Puncte (*1*), (*2*), (*3*), (*4*), (*5*), (*6*), die ein Sechsecksechsseit bilden, so sind (*1*) und (*4*), (*2*) und (*5*), (*3*) und (*6*) gegenüberliegende Ecken. Die Seite, welche (*1*) und (*2*) verbindet, werde mit (*I*) bezeichnet, die (*2*) mit (*3*) verbindet, werde mit (*II*) bezeichnet, die (*3*) mit (*4*) mit (*III*) etc., die (*6*) mit (*1*) verbindet, werde mit (*VI*) bezeichnet. Dann sind (*I*) und (*IV*), (*II*) und (*V*), (*III*) und (*VI*) gegenüberliegende Seiten.

Der Beweis des Brianchon'schen Satzes für den speciellen Fall, dass zwei Seiten des Sechsseits die Träger der projectiven, den Büschel $B^{(2)}$ zweiter Ordnung erzeugenden geraden Gebilde sind, ist erbracht. Denn das Sechsseit $sbs'gag'$ oder wenn wir es durch seine Ecken bezeichnen $BB'MGG'L$, besteht aus Strahlen des Büschels $B^{(2)}$ und die Verbindungslinien der Ecken $GB(\beta)$ und $G'B'(\beta')$ und $ML(\sigma)$ gehen, wie bewiesen, durch einen und denselben Punct. In diesem Sechsseit sind aber alle Ecken und Seiten, abgesehen davon, dass die letzteren Strahlen des Büschels $B^{(2)}$ sein müssen, willkürlich gewählt, bis auf die Seiten s und s'. Diese sind insofern vor den übrigen Strahlen des Büschels bevorzugt, als sie zwei Strahlen des Büschels sind auf denen die übrigen Strahlen projective Gebilde bestimmen. Der Satz des Brianchon muss aber als allgemein bewiesen angesehen werden, wenn gezeigt wird, dass die Strahlen des Büschels $B^{(2)}$ auf zwei beliebigen unter ihnen projective Gebilde bestimmen.

Die Brianchon'schen Sechsseitsechsecke (Fig. 16, Taf. IV) $sbs'gag'$, $sbs'ga_1g'$, $sbs'ga_2g'$, .. bestimmen auf σ die (Brianchon'schen) Puncte P, P_1, P_2, .. σ ist fest, weil diese Gerade durch L und M allein bestimmt ist, und es ist mithin $\beta, \beta_1, \beta_2, .. \,\overline{\overline{\wedge}}\, \beta', \beta'_1, \beta'_2, ..$ und also sind die Punctreihen $G, G_1, G_2, .. \; G', G'_1, G'_2, ..$ einander projectiv. Es bestimmen die Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung auf zweien unter ihnen auf g, g' projective Punctreihen. Es

sind s, s' keine ausgezeichneten Strahlen, der Brianchon'sche Satz gilt allgemein für jedes Sechsseitsechseck aus Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung.

Aus sechs Geraden kann man auf sechzig Arten ein Sechsseitsechseck bilden; ist eins davon ein Brianchon'sches, so sind sie es alle. Nennt man die Schnittpuncte der Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken Brianchon'sche Puncte, so bilden die sechzig Brianchon'schen Puncte eines Sechsseits eine ähnliche Configuration als die sechzig Pascal'schen Geraden eines Sechsecks, die wir nicht weiter discutiren, weil sie aus der Pascal'schen Configuration dualistisch folgt. Die lineare Bedingung dafür, dass sechs gerade Linien in einem Büschel zweiter Ordnung liegen, ist die, dass sie ein Brianchon'sches Sechsseitsechseck bilden müssen.

Durch fünf Puncte ist eine Punctreihe zweiter Ordnung oder eine Curve zweiter Ordnung völlig und eindeutig bestimmt. — Projicirt man von den Puncten *1* und *2* die Puncte *3, 4, 5,* so erhält man drei Paare entsprechender Strahlen projectiver Büschel, die eine Curve durch die fünf Puncte erzeugen. Legt man eine Gerade g durch einen der fünf Puncte, etwa *5,* so ist auf ihr ein Punct *6* durch den Pascal'schen Satz eindeutig bestimmt, also ist die Curve eindeutig bestimmt. Man bilde das Sechsecksechsseit $(1\,2)$, $(2\,3)$, $(3\,4)$, $(4\,5)$, g, x, so schneiden sich $(1\,2)$ und $(4\,5)$, $(2\,3)$ und g in Puncten einer Pascal'schen Geraden p, die vollständig durch die beiden Schnittpuncte bestimmt ist. Auf p müssen sich auch $(3\,4)$ und x schneiden. Der Schnittpunct $(3\,4), p$ mit *1* verbunden liefert die Gerade x eindeutig, und (gx) den Punct *6* auf g, der zu $K^{(2)}$ gehört.

Der Pascal'sche Satz behält auch seine Gültigkeit, wenn eine oder zwei Seiten Tangenten sind. Für den Fall einer Tangente ist dies oben erwiesen, für den Fall zweier Tangenten werden wir es nachher noch einmal speciell beweisen. Daraus folgt dann ähnlich wie bei fünf Puncten:

Eine Curve $K^{(2)}$ ist durch vier Puncte und eine Tangente in einem derselben, oder durch drei Puncte und zwei Tangenten in zweien dieser Puncte völlig bestimmt. — Die Curve wird dadurch erzeugt, dass man den Punct, der auf der Tangente liegt, zum Projectionscentrum nimmt, und dass man den Strahl des zweiten Projectionscentrums, der durch S geht, der Tangente projectiv zuordnet.

Aufgabe. In einem Puncte G auf $K^{(2)}$ eine Tangente zu ziehen. Man nehme einen zweiten Punct G' auf $K^{(2)}$ und pro-

jicire von GG' gleichzeitig drei weitere Puncte ABC von $K^{(2)}$. In den hierdurch bestimmten projectiven Büscheln $G(ABC..) \overline{\wedge} G'(ABC..)$ ziehe man in G den $G'G$ entsprechenden Strahl, er ist die Tangente in G, oder man benutze den Pascal'schen Satz. Man bilde das Sechsecksechsseit (GG'), $(G'A)$, (AB), (BC), (CG), x, worin x die Tangente sein soll. Die Schnittpuncte $(GG')(BC)$ und $(G'A)(CG)$ bestimmen eine Pascal'sche Gerade p, auf der sich (AB) und x schneiden müssen. Der Punct (AB), p bestimmt daher einen Punct von x, und G ist ein zweiter, x ist bestimmt.

Ein specieller Fall des Pascal'schen Satzes ist der folgende, der bei Einführung von Winkelmassen wichtig wird. (Fig. 17, Taf. IV.) Sind AB, $A'B'$, $A''B''$ sechs Puncte einer Curve zweiter Ordnung, und ist AB' parallel BA', $A''B'$ parallel $A'B''$, so ist auch AB'' parallel BA''. Die Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits ist die uneigentliche Gerade.

Durch fünf Gerade oder Strahlen ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung $B^{(2)}$ eindeutig bestimmt.

Gäbe es nämlich zwei verschiedene Strahlbüschel zweiter Ordnung, welche fünf Strahlen gemein haben, $B^{(2)}$ und $B_1^{(2)}$, so müssten auf zweien der gemeinsamen Strahlen die Strahlen von $B^{(2)}$ und $B_1^{(2)}$ projective Gebilde erzeugen. Es mögen nun durch $B^{(2)}$ die Gebilde s und s', durch $B_1^{(2)}$ s_1 und s_1' auf jenen zwei Strahlen bestimmt werden, so dass die Punctreihen s und s_1 dieselben und s' und s'_1 dieselben Träger haben. Dann ist $s \overline{\wedge} s'$, $s_1 \overline{\wedge} s_1'$. Da aber den drei Puncten in s und s_1, welche die noch übrigen gemeinsamen Strahlen von $B^{(2)}$ und $B_1^{(2)}$ bestimmen, dieselben drei Puncte in s' und s_1' entsprechen, so müssen allen gemeinsamen Puncten von s und s_1 gemeinsame Puncte von s' und s_1' entsprechen, und da $B^{(2)}$ und $B_1^{(2)}$ alle möglichen Verbindungslinien entsprechender Puncte sind, so müssen $B^{(2)}$ und $B_1^{(2)}$ zusammenfallen.

Man kann aber zu diesem Beweise auch den Brianchon'schen Satz genau so wie bei den Punctreihen zweiter Ordnung (Curven zweiter Ordnung) den Pascal'schen anwenden.

Ein Büschel zweiter Ordnung ist nicht bloss durch fünf Strahlen, sondern auch durch vier Strahlen und einen Stützpunct auf einem derselben, oder durch drei Strahlen und zwei Stützpuncte auf zweien derselben vollständig bestimmt.

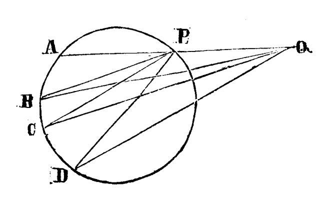
Aufgabe. Auf einer Geraden g des Büschels $B^{(2)}$ den Stützpunct, den Punct zu construiren, durch den ausser g kein weiterer Strahl des Büschels geht. — Man greife noch einen andern Strahl y' des Büschels $B^{(2)}$ heraus. Dann bestimmen auf

g und g' drei andere Strahlen abc, eine projective Verwandtschaft $g(abc..) \overline{\wedge} g'(abc..)$. Der Punct auf g, der dem Schnittpunct (gg') als Punct von g' projectiv entspricht, ist der Stützpunct. Man kann aber auch den Brianchon'schen Satz benutzen. Man bilde das Sechsseitsechseck $(gg')(g'a)(ab)(bc)\,c'g)\,X$ wo X der gesuchte Stützpunct auf g ist. Die Geraden $(gg')(bc)$; $(g'a)(c'g)$; (ab, X) bestimmen den Brianchon'schen Punct P, der durch die beiden ersten Paare völlig bestimmt ist. Die Gerade $[(ab), P]$ bestimmt auf g den Stützpunct X eindeutig.

Die Bestimmung der Gebilde zweiter Ordnung durch fünf Elemente unterliegt einigen Ausnahmen. Liegen von fünf gegebenen Puncten vier auf einer Geraden, so ist jedes Geradenpaar, das aus dieser Geraden und einer zweiten durch den fünften Punct besteht, als eine Curve zweiter Ordnung anzusehen, welche die fünf Elemente enthält. Liegen die fünf Puncte in einer Geraden, so ist die eine Gerade des Geradenpaares ganz willkürlich. Gehen vier Strahlen durch einen Punct, so zerfällt der Büschel in zwei lineare, der Träger des einen ist der Schnittpunct der vier Geraden, der Träger des andern kann auf dem fünften Strahle willkürlich angenommen werden.

Schneiden (Fig. 18[a], Taf. IV) die drei Seiten abc eines Dreiecks die Seiten $a'b'c'$ eines andern Dreiecks in drei Puncten ABC einer geraden Linie, so liegen die sechs übrigen Schnittpuncte auf einer Curve zweiter Ordnung. Denn $LMNOPQ$ ist ein Pascal'sches Sechsecksechsseit. Dualistisch: Gehen (Fig. 18[b], Taf. IV) von den neun Verbindungslinien der Ecken zweier Dreiecke drei abc durch einen Punct, so gehören die sechs übrigen einem Strahlbüschel zweiter Ordnung an. Denn $lmnopq$ bilden ein Brianchon'sches Sechsseitsechseck.

Alle Puncte P, von denen aus vier Puncte $ABCD$, die nicht in einer Geraden liegen, einem gegebenen Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv aufgenommen werden, liegen in einer Curve zweiter Ordnung.

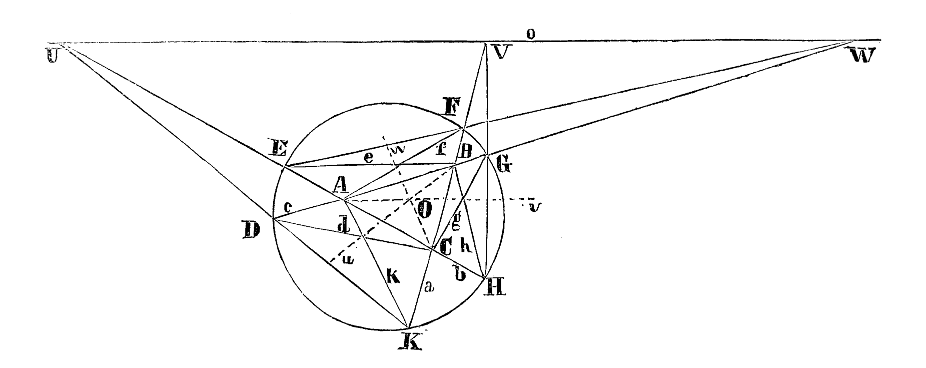


Construirt man nach Seite 28 erst einen solchen Punct P, und legt durch $ABCDP$ eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so werden $ABCD$ von jedem andern Puncte P' der Curve $K^{(2)}$ durch Strahlen, die $P(ABCD)$ und also $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv sind, aufgenommen. Ausser $K^{(2)}$ giebt es aber keine andern Puncte, die der Aufgabe genügen. Wäre Q ein solcher, und trifft QA $K^{(2)}$ in P, so müsste

$Q(ABCD) \overline{\wedge} \alpha\beta\gamma\delta \overline{\wedge} P(ABCD)$ sein, und weil (QA), (PA) sich selbst entsprechende Strahlen sind, so müsste $Q(ABCD) \overline{\wedge} P(ABCD)$ sein; es müssten also $ABCD$ auf einer Geraden liegen, was gegen die Voraussetzung ist. Da die Zuordnung von $P(ABCD)$ zu $\alpha\beta\gamma\delta$ sechsfach gewählt werden kann, so giebt es sechs Curven zweiter Ordnung, die der Aufgabe genügen; ist der Wurf harmonisch, so giebt es nur drei, ist aber die Zuordnung eine bestimmte, so giebt es nur eine.

Der Beweis des dualistischen Satzes, dass *die geraden Linien p, die vier Gerade $abcd$ einem Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv schneiden, in einem Büschel zweiter Ordnung liegen,* kann füglich dem Leser überlassen werden.

Lehrsatz. Wenn man von den Ecken eines Dreiecks ABC nach den Schnittpuncten der gegenüberliegenden Seiten mit einer Curve zweiter Ordnung $DEFGHK$ sechs gerade Linien zieht, so sind sie Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung.



Beweis. Das Sechseck $EFKDGH$ ist einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben, also schneiden sich EF und DG in einem Puncte W, FK und GH in einem Puncte V, EH und KD in einem Puncte U auf einer Geraden o. Construirt man nun die Puncte, welche von UVW bez. durch die Ecken AC, BC, AB harmonisch getrennt sind, so sind offenbar die Verbindungslinien dieser Puncte mit den gegenüberliegenden Ecken die Geraden u, v, w, diese müssen sich also in einem Puncte O schneiden, und da sie die Hauptdiagonalen des Sechsseits $efhgkd$ sind, so ist dieses ein Brianchon'sches Sechsseit.

Der hierzu dualistische Satz ist zugleich die Umkehrung desselben. Gehen durch die Ecken ABC eines Dreiseits abc Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung und sind die

Schnittpuncte derselben mit den gegenüberliegenden Seiten *EFGHKD*, so liegen die so erhaltenen sechs Puncte auf einer Curve zweiter Ordnung, bilden ein Pascal'sches Sechseck.

Die Begriffe **Innerhalb** und **Ausserhalb** bei Curven zweiter Ordnung. — Die Curven zweiter Ordnung sind unicursal, die Erzeugung durch projective Strahlbüschel lehrt, dass man über keinen ihrer Puncte zweimal kommt, wenn man sie immer im gleichen Sinne verfolgt, und dass man schliesslich zum Ausgangspuncte zurückgelangt. Daher besitzen die Curven, wenn man von der Ausartung in ein Geradenpaar absieht, keinen Knotenpunct (Doppelpunct). Die Curve $K^{(2)}$ theilt deshalb die ganze Ebene in zwei getrennte Felder A und I. Von einem Puncte in A kann man nicht auf einem continuirlichen Wege zu einem Puncte in I gelangen, ohne die Curve zu überschreiten. Bei der Hyperbel, die uneigentliche Puncte enthält, enthalten beide Felder A und I Stücke der uneigentlichen Geraden, diese Stücke selbst theilen die Felder in zwei Theile, die eben durch die uneigentlichen Puncte zu einem Stücke zusammengefügt werden. Puncte innerhalb $K^{(2)}$ sind solche, von denen aus keine Tangenten an die Curve gelegt werden können. Jede durch sie gelegte Gerade trifft $K^{(2)}$ in zwei Puncten. Puncte ausserhalb $K^{(2)}$ sind solche, durch die Tangenten an die Curve gelegt werden können, und zwar giebt es zwei und nur zwei Tangenten durch einen solchen Punct. Auch giebt es durch solche Puncte gerade Linien, die die Curve nicht treffen. — Giebt es durch den Punct T eine Tangente t, die die Curve in L berührt, die also die Curve nicht wieder trifft, so kann man die Gerade t stetig so um T drehen (in der Vorstellung von der Geraden t zu andern übergehen), dass die Curve von der gedrehten Geraden getroffen wird, und auch so, dass die Curve nicht getroffen wird. Wir drehen die Gerade im ersten Sinne. So trifft die gedrehte Gerade die Curve in zwei Puncten, bis sie wieder einmal Tangente wird. Dies muss aber wirklich einmal eintreten, weil sie, wenn sie sich der Lage t durch fortgesetzte Drehung wieder stetig nähert, einmal die Curve nicht mehr trifft. Der Uebergang vom Schneiden zum Nichtschneiden giebt die zweite Tangente t' durch T. Dreht man nun weiter, so kann bis t erreicht wird, die Gerade die Curve nicht mehr treffen, weil sie sonst aus getrennten Stücken bestehen müsste. Es giebt also durch T zwei und nur zwei Tangenten. Hierfür finden wir nachher einen weitern Beweis, der Continuitätsbetrachtungen nicht erfordert. — Das Feld in dem der Punct T liegt sei A.

Ist T' irgend ein andrer Punct in A, so legen wir durch T und T' eine Gerade g. Das Stück TT' derselben liege ganz in A, mit einem der beiden Theile zwischen T und T', deren einer eine Strecke ist, deren andrer den uneigentlichen Punct enthält, ist dies sicher der Fall. Denn trifft g die Curve nicht, so liegt g ganz in A. Oder g trifft $K^{(2)}$, so gehen wir von T in irgend einem Sinne auf g nach T'; kommen wir dabei eher nach T' als zur Curve, so liegt der zwischen T und T' zurückgelegte Weg ganz in A. Treffen wir aber erst die Curve in P, so gelangen wir (auf g) nach I und bleiben in I bis g die Curve zum zweiten Male in Q trifft, wobei wir T' nicht überschritten haben, weil T' in A liegt, bei Q treten wir wieder auf das Gebiet A, und müssen dort einmal auf T' treffen. Der Rest $T'T$ liegt nun ganz in A, weil g die Curve nicht wieder schneiden kann, da sie ja nur zwei Puncte (P, Q) mit ihr gemein haben kann. Durch T' giebt es ebenfalls Tangenten an die Curve. Denn die Schnittpuncte der stetigen Tangentenfolge mit der Geraden g bilden jedenfalls eine stetige Punctfolge, wofür ein strenger Beweis vorbehalten bleibt, und fallen, wenn der Stützpunct der veränderlichen Tangente auf P oder Q fällt, eben mit diesen Puncten zusammen; die Schnittpuncte müssen daher den ganzen Theil der Geraden g zwischen P und Q bedecken, der den Punct T enthält, in A liegt, und es muss deshalb auch mindestens einer auf T' fallen. Durch T' giebt es demnach immer eine folglich zwei und nur zwei Tangenten, der Punct T liegt ausserhalb $K^{(2)}$. Alle Puncte des Feldes A sind Puncte ausserhalb, durch jeden giebt es Tangenten an die Curve. — Sind $t\,t'$ die Tangenten durch T an die Curve $K^{(2)}$, so folgt aus unserer Betrachtung noch, dass in dem einem Winkel tt' (und seinem Scheitelwinkel) alle Geraden durch T liegen, welche die Curve treffen, im Nebenwinkel aber alle Geraden liegen, welche die Curve nicht treffen.

Eine Tangente, die einen Punct T in A besitzt, liegt ganz in A, weil sie die Curve nicht überschreiten kann. Deshalb liegen alle Tangenten ganz in A. Denn läge eine Tangente theilweise oder ganz in I, so müsste sie jede Tangente, die in A liegt, irgend wo treffen, also in A treffen. Sie muss also Puncte in A haben, mithin ganz in A liegen. Durch einen Punct R in I giebt es daher keine Tangenten. Jede durch R gehende Gerade muss die Curve treffen. Denn ginge eine Gerade, die um R gedreht wird, einmal vom Schneiden zum Nichtschneiden über, so würde eine Tangente den Uebergang bilden, eine Tangente durch R aber giebt es nicht.

Satz von Mac Laurin. *In jedem Viereck aus vier Puncten einer Curve $K^{(2)}$ zweiter Ordnung liegen die Schnittpuncte zweier Paare gegenüberliegender Seiten mit den Schnittpuncten der in den gegenüberliegenden Eckpuncten gezogenen Tangenten in einer Geraden.* (Fig. 19, Taf. V.) *Oder, zwei Nebenecken eines eingeschriebenen Vierecks liegen mit zwei Ecken des umschriebenen Vierseits, dessen Stützpuncte die Ecken des Vierecks sind, in einer Geraden.* Gegenüberliegende Seiten sind solche, die durch verschiedene Eckenpaare des Vierecks gehen. Zieht man zwei Paare gegenüberliegender Seiten, so erhält man ein Viereckvierseit, in diesem sind gegenüberliegende Ecken solche, die nicht auf einer Seite des Viereckvierseits liegen. Aus vier Puncten lassen sich drei verschiedene Viereckvierseite (einfache Vierecke) bilden. — Beim Beweise benutzen wir mehrfach den Satz, den man überhaupt immer bereit halten muss, $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \beta\alpha\delta\gamma \barwedge \gamma\delta\alpha\beta \barwedge \delta\gamma\beta\alpha$. — Es ist

$$pvsa \barwedge brup \barwedge purb,\ pvsa \doublebarwedge purb,$$
XZP liegen in einer Geraden y,
$$qvrc \barwedge dsuq \barwedge qusd,\ qvrc \doublebarwedge qusd$$
XZQ liegen auf einer Geraden y

die beiden Geraden enthalten XZ, sind also ein und dieselbe. Also liegen $XZPQ$ auf einer Geraden, w. z. b. w. Genau so liegen $YRXS$ auf einer Geraden z, $YUZV$ auf einer Geraden x. — Damit ist zugleich der Pascal'sche Satz für den Fall erwiesen, dass zwei Seiten des Sechsecksechsseits Tangenten sind.

Der dualistische Satz lautet: *In jedem Vierseit aus Strahlen eines Büschels $B^{(2)}$ zweiter Ordnung gehen die Verbindungslinien zweier Paare gegenüberliegender Ecken und der Stützpuncte zweier gegenüberliegender Seiten durch einen Punct.* — Man kann Fig. 19, Taf. V wieder benutzen, nur ist die Curve als (vorläufig) nicht zugehörig anzusehen. Es ist

$$PVSA \barwedge BRUP \barwedge PURB,\ PVSA \doublebarwedge PURB$$
xyz gehen durch das Perspectivitätscentrum Y,
$$QVRC \barwedge DSUQ \barwedge QUSD,\ QVRC \doublebarwedge QUSD$$
yzq gehen durch einen Punct Y,

er ist durch yz bestimmt, mithin beidemale derselbe. Die Seiten des Vierseits lassen sich auf dreierlei Art in Paare gegenüberliegender ordnen (zu Vierseitvierecken gestalten), dies giebt drei Puncte XYZ durch die vier gerade Linien, zwei Nebenseiten des Vierseits und zwei Verbindungslinien gegenüberliegender Stützpuncte gehen.

Wir nennen die Figur, die diese Sätze, darstellt Mac Laurin'-

sche Configuration, sie ist dieselbe ob man von der Punctreihe zweiter Ordnung $K^{(2)}$ oder von der Strahlenreihe zweiter Ordnung $B^{(2)}$ ausgeht, und giebt dadurch den Anlass, einen Zusammenhang zwischen beiden Gebilden aufzudecken. Zunächst aber sprechen wir die beiden Sätze noch einmal wie folgt aus:

Die Nebenecken eines einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks, und die Ecken des der Curve in den Vierecksecken umschriebenen Vierseits liegen dreimal zu je vieren auf einer Geraden.

Die Nebenseiten eines aus Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung bestehenden Vierseits und die Seiten des aus den Stützpuncten des Vierseits gebildeten Vierecks gehen dreimal zu je vieren durch einen Punct.

Nun beweisen wir den wichtigen Satz: *Die Tangenten einer Curve zweiter Ordnung bilden einen Büschel zweiter Ordnung* und den dualistischen: *Die Stützpuncte eines Büschels zweiter Ordnung bilden eine Curve zweiter Ordnung*, d. h. sie werden von zweien unter ihnen durch projective Büschel projicirt.

Ersetzt man (Fig. 19[a], Taf. V) B durch B_1, B_2, .. so ist

$$zz_1z_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; xx_1x_2 \ldots \text{ (Perspectivitätsachse } v)$$

also ist
$$RR_1R_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; PP_1P_2 \ldots,$$

d. h. die Tangenten bb_1b_2 .. bilden auf zweien unter ihnen, auf a und c projective Punctreihen, sie bilden einen Büschel zweiter Ordnung.

Aendert man (Fig. 19[b], Taf. V) b in b_1 b_2 .. ab, so bestimmen die Strahlen $C(BB_1B_2 \ldots)$ auf der Geraden s (AD) Puncte ZZ_1 Z_2 .., und die Strahlen $A(BB_1B_2 \ldots D \ldots)$ auf der Geraden z (CD) Puncte YY_1Y_2 .. von der Eigenschaft, dass ZY, Z_1Y_1, Z_2Y_2 .. $(xx_1x_2 \ldots)$ durch einen Punct V gehen, so dass $ZZ_1Z_2 \ldots$ $\overline{\wedge}$ YY_1Y_2 .. ist, und folglich sind die Büschel $A(BB_1B_2 \ldots)$ und $C(BB_1B_2 \ldots)$ einander projectiv. Die Stützpuncte BB_1B_2 .. werden von A und C aus durch projective Strahlbüschel projicirt w. z. b. w.

Die Geraden SR, SR_1, SR_2 .. gehen durch YY_1Y_2 .., sind diesen Puncten perspectiv, also ist auch $RR_1R_2 \ldots \;\overline{\wedge}\; A(BB_1B_2 \ldots)$ und $\overline{\wedge}\; C(BB_1B_2 \ldots)$. Aendert sich R auf s stetig und mit R der Strahl b, so ändern sich die Strahlen in den Büscheln $A(BB_1B_2 \ldots)$ $C(BB_1B_2 \ldots)$ stetig und mit ihnen die Puncte der Curve. Einer stetigen Aenderung der b entspricht demnach eine stetige Aenderung der Stützpuncte, und einer stetigen Aenderung der Stützpuncte entspricht eine stetige Aenderung der Tangenten, was auf Seite 44 bereits angekündigt wurde.

Durch diese Sätze gewinnt die Dualität einen neuen Inhalt.

Bei linearen Gebilden stand der Geraden der Punct, der geraden Punctreihe der Strahlenbüschel durch einen Punct dualistisch gegenüber. Der Curve zweiter Ordnung steht der Büschel zweiter Ordnung gegenüber. Wie aber die gerade Punctreihe zu einer Geraden zusammengefasst dem Stützpunct des Büschels, also einem Puncte entspricht, so kann man nun die Punctreihe zweiter Ordnung in der Curve $K^{(2)}$ zusammenfassen und ihr den Träger, die Stützcurve des dualistisch gegenüberstehenden Strahlbüschels entsprechen lassen, also der Curve zweiter Ordnung wieder eine Curve zweiter Ordnung auf die sich die den Curvenpuncten entsprechenden Strahlen stützen. Der Brianchon'sche Satz, der dem Pascal'schen dualistisch gegenübersteht, bezog sich zunächst auf ein Sechsseitsechseck, dessen Seiten Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung sind. Jetzt dürfen wir sagen, dass er sich auf eine Curve zweiter Ordnung beziehe, der die Seiten umschrieben sind. Der Mac Laurin'sche Satz selbst kann in seinem zweiten Theile so gefasst werden: Ist ein Vierseit einer Curve zweiter Ordnung umschrieben und zeichnet man in den Stützpuncten als Ecken ein Viereck ein, so erhält man die Mac Laurin'sche Configuration. Man sieht, dass der Mac Laurin'sche Satz und der ihm dualistisch verwandte völlig identisch sind.

Fünf gerade Linien bestimmen nicht bloss einen Büschel zweiter Ordnung, sondern auch eine Curve zweiter Ordnung, an der sie Tangenten sind.

Da durch jeden Punct nur zwei Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung gehen, und die Tangenten einer Curve zweiter Ordnung einen Büschel zweiter Ordnung bilden, so giebt es durch jeden Punct ausserhalb nur zwei Tangenten an eine Curve zweiter Ordnung, was jetzt ohne Continuitätsbetrachtung einleuchtet.

Jede Curve zweiter Ordnung besitzt Tangenten und somit Puncte ausserhalb, es giebt folglich gerade Linien, die die Curve nicht treffen. Es giebt gerade Linien, die die Curve einmal treffen und solche, die sie zweimal treffen. Projicirt man die Puncte der Curve $K^{(2)}$ von zwei Puncten S, S' derselben auf eine Gerade, die $K^{(2)}$ zweimal trifft, so bestimmen die projectiven Büschel auf ihr projective Punctreihen, und die Schnittpuncte der Geraden mit $K^{(2)}$ sind die sich selbst entsprechenden Puncte. Es giebt also projective Verwandtschaft auf demselben Träger mit einem Paare sich selbst entsprechender Elemente; man kann sie hyperbolische Projectivität nennen. Projicirt man $K^{(2)}$ von S, S' auf eine Gerade, die die Curve nicht trifft, so besitzen die projectiven Reihen auf ihr keine sich selbst entsprechenden

Elemente; man kann die Verwandtschaft elliptische Projectivität nennen. Es giebt elliptisch projective Gebilde. Projicirt man die Curve auf eine Tangente, so erhält man projective Gebilde, die nur ein Element entsprechend gemein haben; wir nennen diese Beziehung parabolische Projectivität. Es giebt parabolische Projectivität. — Projicirt man eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel von zweien ihrer Puncte auf die uneigentliche Gerade, so erhält man auf ihr bez. hyperbolisch, elliptisch und parabolisch projective Gebilde. — Die Hyperbel hat zwei uneigentliche Puncte, die Tangenten in ihnen heissen Asymptoten. — Die uneigentliche Gerade als Tangente im uneigentlichen Puncte kann als Asymptote der Parabel angesehen werden, die Ellipse besitzt keine (realen) Asymptoten.

Wir haben den Pascal'schen Satz erwiesen für die als Grenzlagen auffassbaren Fälle, dass eine oder zwei Seiten des Sechsecksechsseits in Tangenten übergehen, er bleibt aber auch noch bestehen, wenn drei Seiten Tangenten sind. Gegen Herleitung des Satzes durch Grenzübergang könnten Bedenken wegen der Strenge erhoben werden. Wir beweisen ihn deshalb wie folgt. (Fig. 20, Taf. V.)

Die Geraden $(2, 6)$ $(2, 4)$, $(6, 5)$ und $(4, 5) = a$ seien Tangenten an eine Curve $K^{(2)}$, $1, 3$ seien die Stützpuncte der beiden ersten. Lässt man die Tangente a in $a'a''$.. übergehen, so gehen 4 und 5 bez. in $4'4''$.., $5'5''$.. über, und es sind die Büschel $1(44'4''..)$ und $2(55'5''..)$ perspectiv, weil sie projective Punctreihen aufnehmen. Fällt 5 auf 6, so fällt 4 auf 2, der Strahl $(1, 2)$ ist entsprechend gemein, die Büschel sind perspectiv. Fällt 5 auf den Punct L in dem sich $(4, 2)$ $(6, 5)$ schneiden, so fällt 4 auf 3, der Punct 3 ist ein Punct der Perspectivitätsachse. Diese geht auch noch durch 6. Denn schneidet sie $(5, 6)$ in X, so muss $(1X)$ durch den entsprechenden Punct Y auf $(2, 4)$ gehen, es muss XY, also $1X$ Tangente an $K^{(2)}$ sein, was nur möglich ist, wenn X auf 6 fällt. Also schneiden sich $(1\,4)$, $(2\,5)$ $(3\,6)$ in einem Puncte, es besteht der Brianchon'sche Satz für den Fall, dass zwei Ecken des Sechsseitssechsecks in Stützpuncte übergehen. Lässt man nun 5 auf M fallen, so fällt 4 auf L. Die Strahlen $(2M)$ $(1L)$ schneiden sich auf der Perspectivitätsachse also auf $(3\,6)$. Dies lässt sich so aussprechen: *Ist ein Dreieck einer Curve zweiter Ordnung umschrieben, so gehen die Transversalen von den Ecken nach den gegenüberliegenden Stützpuncten durch einen Punct.* Dies ist der Brianchon'sche Satz.

Aehnlich beweist man den dualistischen Satz. *Die drei*

Puncte DEF, in denen die Seiten eines einer Curve $K^{(2)}$ eingeschriebenen Dreiecks abc von den in den gegenüberliegenden Ecken gezogenen Tangenten getroffen werden, liegen in einer Geraden. Dies ist der Pascal'sche Satz.

Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks Transversalen, die sich in einem Puncte schneiden, so lässt sich dem Dreiecke eine Curve zweiter Ordnung einschreiben, die die Seiten in den durch die Transversalen bestimmten Puncten berührt.

Nimmt man für beide Sätze dieselbe Figur (Fig. 21, Taf. VI), so erkennt man, dass der Schnittpunct einer Seite des umschriebenen Dreiecks mit der gegenüberliegenden des eingeschriebenen von dem Stützpuncte durch die beiden andern Seiten des umschriebenen Dreiecks harmonisch getrennt ist. Daraus ergiebt sich als specieller Fall:

Der Stützpunct einer Tangente einer Hyperbel liegt in der Mitte zwischen den Puncten die die Asymptoten auf der Tangente bestimmen.

Als eine Anwendung der Mac Laurin'schen Configuration kann hier der Satz gebracht werden. *Sind* (Fig. 22, Taf. VI) *abcd Tangenten der Curven K und K' zweiter Ordnung, und sind ABCD bez. A'B'C'D' ihre Stützpuncte auf K und K', so liegen die acht Puncte ABCDA'B'C'D' auf einer Curve zweiter Ordnung.*

Die Puncte XYZ als Schnittpuncte der Nebenseiten des Vierseits *abcd* müssen zugleich die Schnittpuncte von je zwei Seiten des Vierecks $ABCD$ und des Vierecks $A'B'C'D'$ nach Mac Laurin sein z. B. X der Schnittpunct von $(AC)(BD)(A'C')(B'D')$. Nun sind $SZRX$ harmonische Puncte, also $P(SZRX)$ harmonische Strahlen, also müssen $(AB')(A'B)$ sich auf PY gleich XY schneiden. Denn in dem Viereck $ABB'A'$ sind zwei Nebenecken TZ durch die beiden durch die dritte Nebenecke P gehenden Seiten harmonisch getrennt. Also ist $A(B'A'DC) \barwedge B(A'B'CD)$, $A(B'A'DC) \barwedge B(B'A'DC)$, also liegen $ABA'B'CD$ auf einer Curve zweiter Ordnung und ebenso $ABCDA'C'$, $ABCDA'D'$. Da aber durch fünf Puncte die Curve völlig bestimmt ist, so liegen $ABCDA'B'C'D'$ auf derselben Curve zweiter Ordnung.

Der dualistische Satz lautet: Haben zwei Kegelschnitte acht Puncte gemein, so liegen die acht Tangenten in ihnen in einem Büschel zweiter Ordnung, stützen sich auf eine Curve zweiter Ordnung.

Satz von Steiner. Bewegt sich (Fig. 23[a], Taf. VII) eine Ecke A eines Dreiecks $AA'A''$ auf einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, und bewegen sich die beiden andern Ecken auf zwei Ge-

raden g', g'', und gehen die Seiten a', a'' durch die Puncte S', S', auf $K^{(2)}$, so beschreibt die dritte A gegenüberliegende Seite a des Dreiecks einen Büschel zweiter Ordnung, zu dem g', g'' gehören. — Denn die Strahlbüschel S', S'' und folglich die Punctreihen A', A'' sind projectiv. Dualistisch hat man (Fig. 23[b], Taf. VII): Bewegt sich eine Seite a eines Dreiecks $aa'a''$ in einem Büschel $B^{(2)}$ (als Tangente einer Curve zweiter Ordnung), während die beiden andern Seiten durch die Puncte G', G'' gehen, und liegen die Ecken in zwei Strahlen s', s'' des Büschels, so beschreibt die dritte Ecke A eine Curve zweiter Ordnung, zu der G', G'' gehören. — Denn die Punctreihen A', A'' auf s', s'' und mithin die Strahlbüschel G', G'' sind projectiv.

Zwei Dreiecke, die einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben sind, sind einer andern Curve zweiter Ordnung umschrieben.

Schneidet (Fig. 24, Taf. VII) die Gerade g' die Curve $K^{(2)}$ in $P'Q'$, schneidet g'' in $P''Q''$, so können wir den Punct A der Reihe nach auf diese Schnittpuncte fallen lassen. Fällt A auf P', so trifft $(S''P')$ die Gerade g' in P'. Die Gerade $(S'P')$ bestimmt auf g'' den entsprechenden Punct, $S'P'$ ist selbst ein Strahl des Büschels $B^{(2)}$. Ebenso gehören $S'Q'$, $S''P''$, $S''Q''$ zu diesem Büschel. Die Ecken der Dreiecke $S'P'Q'$, $S''P''Q''$ liegen in einer Curve $K^{(2)}$, ihre Seiten liegen in einem Büschel $B^{(2)}$. Die Dreiecke sind einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben und einer andern umschrieben.

Giebt es ein Dreieck $S'P'Q'$, das einer Curve $K^{(2)}$ eingeschrieben, und zugleich einer andern Curve zweiter Ordnung $\Gamma^{(2)}$ umschrieben ist, so giebt es unendlich viele solcher Dreiecke. Denn zieht man die Tangenten $S''P''$, $S''Q''$ an $\Gamma^{(2)}$, während $S''P''Q''$ auf $K^{(2)}$ liegen, so muss $P''Q''$ ebenfalls Tangente an $\Gamma^{(2)}$ sein, weil durch fünf Tangenten $S'P'$, $P'Q'$, $Q'S'$, $S''P''$, $S''Q''$ der Büschel zweiter Ordnung (und seine Stützcurve $\Gamma^{(2)}$), in dem nach vorigem Satze auch $P''Q''$ liegen muss, vollständig bestimmt ist.

P r o j e c t i v e P u n c t r e i h e n z w e i t e r O r d n u n g. Legt man in einen oder in zwei Puncte einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ als Centren zwei projective Strahlbüschel $abc.. \barwedge a'b'c'..$, so bestimmen diese auf $K^{(2)}$ Punctreihen $ABC..$, $A'B'C'..$, die man (krumme) projective Punctreihen zweiter Ordnung nennt. Projicirt man diese Punctreihen von irgend zwei Puncten der Curve aus, so erhält man projective Strahlbüschel nach dem Satze, dass die Puncte einer Curve von irgend zweien unter ihnen durch projective Büschel projicirt werden.

Die Perspectivitätsachse krummer projectiver Punctreihen. Projective Punctreihen auf einer Curve $K^{(2)}$ sind stets einer und derselben geraden Punctreihe perspectiv. Den Träger dieser geraden Punctreihen wollen wir die Perspectivitätsachse der beiden projectiven Punctreihen zweiter Ordnung nennen.

Projiciren wir (Fig. 25, Taf. VII) die Reihen $ABC\,..$, $A'B'C'\,..$ von zwei entsprechenden Puncten, etwa von AA' aus, so dass $A(A'B'C'\,..) \barwedge A'(ABC\,..)$ oder $a'b'c'\,.. \barwedge abc\,..$ ist, so sind die Büschel perspectiv wegen des entsprechend gemeinen Strahles $(AA')(A'A)$ oder aa', und die entsprechenden Strahlen schneiden sich deshalb auf einer Geraden g, der Perspectivitätsachse der Büschel, die durch (bb'), (cc') bestimmt ist. Projicirt man von C und C' aus, so ist auch $C(C'A'B'\,..) \doublebarwedge C'(CAB\,..)$, die zugehörige Perspectivitätsachse sei g', sie geht durch (cc') und $(CB')(C'B)$, ist also die Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits $AB'CA'BC'$, geht deshalb auch durch den Schnittpunct von (AB') und $(A'B)$ oder (bb') und fällt mit g zusammen. *Es giebt nur eine Perspectivitätsachse zweier projectiver Punctreihen auf einer Curve zweiter Ordnung.*

Die **Aufgabe**, die sich selbst entsprechenden Puncte zweier projectiven Punctreihen auf $K^{(2)}$ zu bestimmen, kann mit dem Lineal gelöst werden, wenn die Curve vollständig continuirlich gegeben ist. Denn die Schnittpuncte LM der Perspectivitätsachse g der beiden Reihen mit $K^{(2)}$ sind die sich selbst entsprechenden. Trifft g die Curve nicht, so ist die Projectivität elliptisch, sie besitzt keine sich selbst entsprechenden Puncte, ist sie Tangente, so giebt es einen sich selbst entsprechenden Punct, die Beziehung ist parabolisch. Trifft g die Curve zweimal, so ist die Projectivität hyperbolisch. Selbstredend *ist eine Projectivität auf einer Curve zweiter Ordnung durch drei Elementenpaare völlig bestimmt.*

Alle Aufgaben zweiten Grades laufen darauf hinaus, die sich selbst entsprechenden Elemente zweier projectiven Verwandtschaften auf demselben Träger zu construiren. Sie lassen sich nicht mit dem Lineal allein ausführen, wohl aber, wenn im Operationsfelde irgend eine Curve zweiter Ordnung vollständig continuirlich gegeben ist. Diese Curve kann zugleich dazu dienen, Massbeziehungen in der Ebene einzuführen, wie sich später zeigen wird. Dazu ist eine Ellipse geeigneter als eine Hyperbel. **Wir wollen deshalb annehmen, im Operationsfelde sei eine Ellipse vollständig continuirlich gegeben, mit deren Hülfe alle Constructionsaufgaben zweiten Grades zu**

lösen sind. Um dieselbe durch einen Namen auszuzeichnen, soll sie die Masscurve heissen. Wir lösen einige Aufgaben mit ihr.

Aufgabe. Die sich selbst entsprechenden Elemente zweier projectiver Punctreihen ABC.., $A'B'C'$.. auf einer Geraden g zu bestimmen. — Man projicire von einem Puncte S der Masscurve die Puncte ABC.. auf die Puncte $\alpha\beta\gamma$.. der Curve, $A'B'C'$.. nach $\alpha'\beta'\gamma'$.. auf der Curve. Man bestimme die Perspectivitätsachse h dieser krummen projectiven Gebilde, ihre Schnittpuncte $\lambda\mu$ mit der Masscurve verbinde man mit S, die Geraden $S\lambda$, $S\mu$ bestimmen die sich selbst entsprechenden Puncte der geraden Punctreihen ABC.., $A'B'C'$.. Trifft die Perspectivitätsachse h die Curve nicht, so ist die projective Verwandtschaft auf g elliptisch, sie besitzt keine sich selbst entsprechenden Elemente.

Die Aufgabe, die sich selbst entsprechenden Strahlen zweier projectiver Büschel mit demselben Träger G zu bestimmen, läuft auf die vorige hinaus, wenn man die Büschel durch eine Gerade g schneidet und auf ihr die sich selbst entsprechenden Elemente der durch die Büschel bestimmten projectiven Punctreihen sucht.

Aufgabe. Die Durchschnittspuncte einer geraden Linie g mit einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ zu finden, wenn diese durch nur fünf Puncte gegeben ist. — Man projicire von zweien der fünf Puncte die übrigen, so erhält man zwei projective Strahlbüschel, die einerseits die Curve erzeugen, andrerseits auf g zwei projective Punctreihen bestimmen. Die sich selbst entsprechenden Puncte dieser Reihen sind die gesuchten. — Ist die Curve durch fünf Tangenten gegeben, so kann man zunächst die Stützpuncte der Tangenten linear (mit dem Brianchon'schen Satze) construiren, und dann wie vorhin die Schnittpuncte der Curve mit g finden.

Aufgabe. Von einem Puncte G an eine durch fünf Puncte gegebene Curve zweiter Ordnung die Tangenten zu ziehen. — Man construire zunächst die Tangenten in den fünf Puncten linear (mit dem Pascal'schen Satze). Die Punctreihen, die drei dieser Tangenten auf den beiden andern ss' bestimmen, projicire man von G aus, so erhält man in G zwei projective Büschel, deren sich selbst entsprechende Strahlen die gesuchten Tangenten sind, weil sie je durch ein Paar entsprechender Puncte auf s und s' gehen. Die Lehre von Pol und Polare wird noch eine bequemere Construction ergeben.

Lehrsatz: Liegen die n Ecken eines einfachen $n+1$-Seits auf n festen Geraden, und gehen die $n+1$ Seiten durch $n+1$ feste Puncte, so liegt die $n+1$te Ecke auf einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$.

Dualistisch: Gehen die n Seiten eines einfachen $n+1$-Ecks durch n feste Puncte, und liegen die Ecken auf $n+1$ festen Geraden, so ist die $n+1$te Seite ein Strahl eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung $B^{(2)}$.

Denn variirt man die Seiten, so bilden sie untereinander projective Büschel, und variirt man die Ecken, so erhält man auf den festen Geraden projective Punctreihen. Soll die $n+1$te Ecke des $n+1$-Seits auf einer gegebenen Geraden liegen, so hat man auf dieser die vom ersten und $n+1$ten Büschel bestimmten projectiven Punctreihen ins Auge zu fassen, und die sich selbst entsprechenden Elemente zu bestimmen, man erhält zwei Lösungen, wenn es deren giebt. Dualistisch hierzu ist die Forderung, dass die $n+1$te Seite des einfachen $n+1$-Ecks durch einen gegebenen Punct gehen soll.

Aufgabe: Die Schnittpuncte zweier Curven zweiter Ordnung KK' zu finden, die durch je fünf Puncte $LMABC$, $LMA'B'C'$ gegeben sind, von denen zwei LM dieselben sind. — Die Curven KK' werden bez. durch die Büschel $L(ABC..) \barwedge M(ABC..)$, $L(A'B'C'..) \barwedge M(A'B'C'..)$ erzeugt. Die Strahlen $L(ABC..)$ mögen K' in den (linear construirbaren) Puncten $U'V'W'$ treffen. Dann ist $L(ABC..) \barwedge M(ABC..) \barwedge M(U'V'W'..)$. Die sich selbst entsprechenden Strahlen der Büschel $M(ABC..) \barwedge M(U'V'W'..)$ liefern die gesuchten Puncte. Fallen noch $AA'(U')$ zusammen, so ist einer der sich selbst entsprechenden Strahlen bekannt. Die Aufgabe, den vierten gemeinsamen Punct von K und K' zu finden, wird linear.*) Die Aufgabe, die Verbindungslinie der beiden gesuchten Puncte, wenn zwei gemeinsame LM gegeben sind, zu finden, wird später linear gelöst, auch dann wenn die Curven sich (real) nicht mehr schneiden.

Aufgabe. Fünf Puncte $ABCDE$ von einem Puncte X aus so zu projiciren, dass der Büschel $X(ABCDE)$ dem Elementargebilde aus fünf Elementen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ projectiv ist. — Der Ort der Puncte P, für die $P(ABCD) \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ ist, ist eine Curve zweiter Ordnung K, der Ort der Puncte Q für die $Q(ABCE) \barwedge \alpha\beta\gamma\varepsilon$ ist, ist eine Curve zweiter Ordnung K'. K und K' haben die Puncte ABC gemein. Der vierte Schnittpunct X löst die Aufgabe. — Die letzten Aufgaben besitzen dualistische Gegenstücke, deren Untersuchung dem Leser überlassen bleibt.

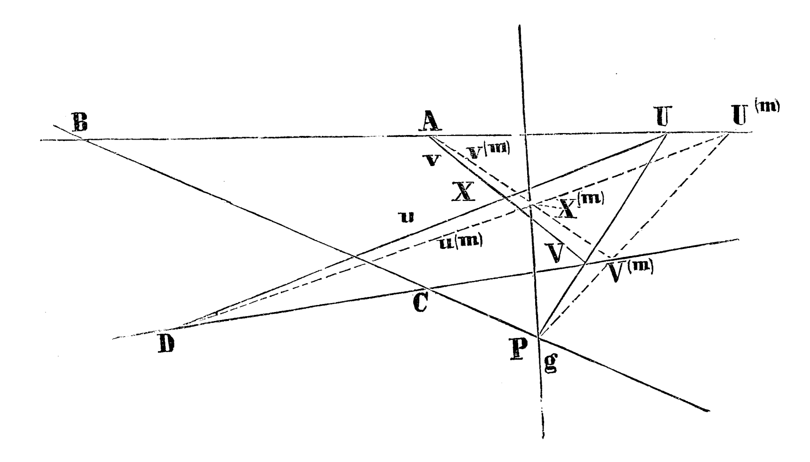
Aufgabe. Man soll eine Curve zweiter Ordnung durch

---

*) Herr E. Lange weist in einem Programme (Wismar 1893) nach, dass die sparsamste Construktion die Zeichnung von 14 Geraden erfordert.

vier vorgegebene Puncte $ABCD$ so legen, dass sie eine Gerade g berührt.

Man verbinde A mit B, B mit C, welche Linie g in P schneidet, und C mit D. Dann ziehe man von P eine beliebige Gerade h, welche AB in U, DC in V schneidet. Verbindet man dann noch DU durch u, AV durch v, welche Linien sich in X schneiden, so ist der geometrische Ort aller Puncte X, X', X'', X'''.., welche man erhält, wenn man h durch Linien h', h'', h'''.. durch



P ersetzt, die auf AB und CD Puncte $U'U''U'''$.. bez. $V'V''V'''$.. bestimmen, eine Curve zweiter Ordnung, weil $UU'U''.. \barwedge VV'V''..$ ist, und also $uu'u''.. \barwedge vv'v''..$ ist. Schneidet nun diese Curve die Gerade g in einem Puncte $X^{(m)}$ (es giebt im Allgemeinen zwei oder keinen solchen Punct), so bestimmen $ABCDX^{(m)}$ die gesuchte Curve, denn g schneidet (BC) auf derselben Geraden, auf welcher sich $v^{(m)}$ und (BC), und $u^{(m)}$ und (AB) schneiden. Das Sechsecksechsseit $(AB)(BC)(CD)u^{(m)}g\,v^{(m)}$ ist ein Pascal'sches.

Ist die Gerade g die unendlich ferne, so erhält man die durch vier Puncte gehenden Parabeln.

Die dualistische Aufgabe, eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn vier Tangenten und ein Punct gegeben sind, die auch zwei (oder keine realen) Lösungen hat, ist analog zu lösen. Wir kommen auf beide Aufgaben von allgemeinerem Gesichtspuncte aus später noch einmal zurück.

Hier noch eine Aufgabe, die auf eine Curve zweiter Ordnung führt. (Fig. 26, Taf. VII.) Durch einen Punct R werde eine Gerade s gezogen, welche zwei gerade Linien ab die sich in Q

schneiden, in A und B trifft. P sei ein Punct auf einer Geraden g, QP werde mit p bezeichnet. Der Punct X, der so auf s gewählt ist, dass $PABX$ dem gegebenen Wurfe $\pi\alpha\beta\gamma$ projectiv ist, bestimmt mit Q eine Gerade c, für welche $pabc \barwedge \pi\alpha\beta\gamma$ ist. Welches ist der geometrische Ort der Puncte X, wenn P auf g läuft? — Die Puncte $PP'P''$.. auf g sind den Geraden $cc'c''$.. projectiv, weil $pbca \barwedge \pi\beta\gamma\alpha$, $p'bc'a \barwedge \pi\beta\gamma\alpha$, .. ist (vgl. Seite 30), die Strahlen $cc'c''$.. sind folglich den Strahlen $pp'p''$.. projectiv. Die Geraden $ss's''$.. $[R(PP'P''..)]$ sind den Puncten $PP'P''$.. perspectiv, also ist $cc'c''.. \barwedge ss's''..$, die Puncte X liegen auf einer Curve zweiter Ordnung durch R und Q, auf der auch die Puncte (ga) (gb) liegen.

Der Wurf $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ heisst dem Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ entgegengesetzt, wenn $\alpha'\beta'\gamma'\delta' \barwedge \alpha\beta\gamma\delta''$ ist und wenn $\alpha\delta''\gamma\delta$ ein harmonischer Wurf ist.

Lässt man δ in $\varepsilon\zeta$.., δ' in $\varepsilon'\zeta'$.. übergehen, und sind die Würfe $\alpha\beta\gamma\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma\zeta$,.. den Würfen $\alpha'\beta'\gamma'\varepsilon'$, $\alpha'\beta'\gamma'\zeta'$,.. bez. entgegengesetzt, so ist $\delta\varepsilon\zeta.. \barwedge \delta'\varepsilon'\zeta'..$

Ist $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'.. \barwedge \alpha\beta\gamma\delta''\varepsilon''\zeta''..$, so ist nach der Definition entgegengesetzter Würfe $\alpha.\gamma.\delta\delta''.\varepsilon\varepsilon''.\zeta\zeta''$.. ein Gebilde in Involution, und also ist $\delta\varepsilon\zeta.. \barwedge \delta''\varepsilon''\zeta''.. \barwedge \delta'\varepsilon'\zeta'..$ und mithin $\delta\varepsilon\zeta.. \barwedge \delta'\varepsilon'\zeta'..$ Fällt δ auf α oder γ, so fällt δ'' auf α bez. γ, und δ' auf α' bez. γ', so dass $\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta.. \barwedge \alpha'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'..$ ist. — Liegen diese projectiven Gebilde auf demselben Träger, so kann man nach den sich selbst entsprechenden Elementen fragen, und findet sie nach der auf Seite 52 gegebenen Methode. Ist im Besonderen $\alpha\beta\gamma\delta$ entgegengesetzt $\beta\gamma\alpha\delta'$ und construirt man die sich selbst entsprechenden Elemente $\lambda\mu$, der Projectivität $\alpha\gamma\delta\varepsilon.. \barwedge \beta\alpha\delta'\varepsilon'..$, und sind $\alpha\beta\gamma\delta\delta'$.. Puncte einer geraden Linie, so löst man damit eine Aufgabe, welche in der projectiven Geometrie der Aufgabe der messenden Geometrie entspricht, eine Strecke nach dem goldenen Schnitt zu theilen. Um den gegebenen Punct β zur Lösung mit verwenden zu können, construire man den Punct φ, der von β durch $\alpha\gamma$ harmonisch getrennt ist, so sind $\alpha\beta\gamma\varphi$ und $\alpha\beta\gamma\beta$ entgegengesetzte Würfe, φ'' ist β, φ' ergiebt sich aus der Bedingung $\beta\gamma\alpha\varphi' \barwedge \alpha\beta\gamma\varphi'' \barwedge \alpha\beta\gamma\beta$, so dass φ' gleich γ sein muss, und man hat nun die entsprechenden Puncte der Projectivitäten $\alpha\gamma\varphi.. \barwedge \beta\alpha\gamma..$ zu construiren.

Es sei $\alpha\beta\varphi\gamma$ (Fig. 29, Taf. VIII) der Durchmesser einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, α sei der Mittelpunct, γ der uneigentliche Punct desselben, β und φ seien die Schnittpuncte desselben mit $K^{(2)}$. Um die sich selbst entsprechenden Puncte $\lambda\mu$ zu finden,

projicirt man (nach Seite 52) die Puncte $\alpha\gamma\varphi$.. und die Puncte $\beta\alpha\gamma$.. von einem Puncte N auf $K^{(2)}$, der hier ein Endpunct des $(\beta\varphi)$ conjugirten Durchmessers sein mag bez. nach $AN\varphi$.. und βAN.. und sucht die Perspectivitätsachse dieser beiden Gebilde. Die Schnittpuncte P von $(AA)(\beta N)$ [(AA) ist die Tangente in A] und α von $(AN)(\beta\varphi)$ bestimmen die Perspectivitätsachse, die $K^{(2)}$ in L und M treffen möge. Die Strahlen NL und NM bestimmen auf $(\beta\varphi)$ die gesuchten Puncte $\lambda\mu$. (In der Figur ist für $K^{(2)}$ ein Kreis und für γ ein uneigentlicher Punct gewählt, damit man die Beziehung zum goldenen Schnitt besser erkennen möge. Die Methoden der messenden Geometrie geben für diesen Fall die Beziehung $\alpha\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\alpha\beta$.)

Kapitel III.

Pol und Polare. Dualität.

Zieht man (Fig. 19, Taf. V) von einem Puncte Z zwei Secanten rs, die eine Curve zweiter Ordnung bez. in den Puncten CB, DA treffen, und schneiden sich die Geraden $AC(v)$, $BD(u)$ in X, $AB(p)$ und $CD(q)$ in Y, so bestimmen XY eine Gerade z, welche die Polare des Punctes Z in Bezug auf die Curve $K^{(2)}$ heisst. Wir beweisen, dass die Lage dieser Geraden z von der Wahl der Secanten rs unabhängig ist. Der Schnittpunct rz werde mit L, der Schnittpunct sz mit M bezeichnet, die Gerade YZ mit x. Die vier Geraden $pzqx$ durch Y bilden einen harmonischen Strahlbüschel, wie ihre Lage zum Viereck $ABCD$ lehrt, die vier Puncte $ZCLB$ und ebenso $ZDMA$ sind harmonische. Daraus folgt, dass die Polare z von Z schon durch eine einzige Secante r völlig bestimmt ist, weil sie durch den Punct L geht, der durch die harmonische Eigenschaft des Wurfes $ZCLB$ völlig bestimmt ist, und durch den Punct R, in dem sich die Tangenten b und c in B und C schneiden, und es ist die so bestimmte Linie z nach dem Mac Laurin'schen Satze genau dieselbe, als die in der früheren Weise durch XY, also durch die beiden Secanten r und s bestimmte Gerade. Demnach ändert sich z nicht, wenn r festgehalten und s verschieden gewählt wird, oder wenn s festgehalten und r verschieden gewählt wird, also auch nicht, wenn r und s willkürlich genommen werden.

Man sagt, der Punct Z sei von seiner Polare durch die Curve $K^{(2)}$ harmonisch getrennt, und spricht damit aus, dass der Schnittpunct jeder Secante durch Z mit der Polare z durch die beiden Schnittpuncte der Secante mit der Curve harmonisch getrennt ist. — *Alle Puncte L, die von einem Puncte Z durch eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ harmonisch getrennt sind, liegen auf einer Geraden der Polare des Punctes Z.* Liegt Z innerhalb $K^{(2)}$, so bedecken die Puncte L die Polare ganz, liegt Z ausserhalb, so bedecken sie nur das Stück der Polare, welches innerhalb $K^{(2)}$ liegt, zwei Puncte L bestimmen aber in jedem Falle die Polare vollständig.

Sucht man (Fig. 19, Taf. V) die Polare von X mittels der Secanten uv, die Polare von Y mittels der Secanten pq, so findet man, dass die Polare x von X durch YZ, die Polare y von Y durch XZ geht. Die Puncte XYZ bilden ein Polardreieck, die Seiten des Dreiecks sind die Polaren der gegenüberliegenden Ecken. — *Die Nebenecken eines einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Vierecks bilden (für diese Curve) ein Polardreieck.*

Giebt es Tangenten vom Puncte Z an die Curve $K^{(2)}$, liegt Z ausserhalb $K^{(2)}$, so berühren die von Z an $K^{(2)}$ gezogenen Tangenten die Curve in den Puncten, die durch die Polare auf ihr bestimmt werden. Denn fallen von vier harmonischen Puncten zwei zugeordnete in einen Punct zusammen (fallen die Schnittpuncte einer Secante zusammen, so dass sie Tangente wird), so muss auch noch ein dritter Punct des harmonischen Wurfes (der Schnittpunct der Secante mit der Polare) auf diesen Punct fallen. Aehnlich ergiebt sich, dass die Polare eines Punctes der Curve selbst die Tangente in diesem Puncte ist.

Die Polare eines Punctes in Bezug auf eine Curve zweiter Ordnung, die durch fünf Puncte gegeben ist, lässt sich linear construiren. Die Puncte $ABCDE$ mögen die Curve $K^{(2)}$ bestimmen, Z sei der Punct, dessen Polare gesucht wird. Man ziehe ZA, ZB. Die Puncte $A'B'$, in denen die Curve von den beiden Secanten noch getroffen wird, liefert der Pascal'sche Satz linear. Man ziehe die Geraden AB', $A'B$, die sich in X, und ziehe die Geraden AA', BB', die sich in Y schneiden mögen. Die Puncte XY bestimmen die Polare z von Z.

Die Aufgabe, von einem Puncte Z aus die Tangenten an eine Curve zweiter Ordnung zu ziehen, lässt sich auf die zurückführen, die Schnittpuncte einer Geraden, nämlich der Polare von Z mit der Curve zu bestimmen. Beim Zeichnen von Tangenten

ist die Polarenmethode auch dann von practischem Nutzen, wenn die Curve vollständig (continuirlich) gegeben ist.

Ist X ein Punct der Polare z von Z, der innerhalb $K^{(2)}$ liegt, so geht die Polare von X durch den Punct Z. Denn die Polare von X enthält alle Puncte, die von X durch die Curve harmonisch getrennt sind, also auch den Punct Z. — Liegt Z ausserhalb $K^{(2)}$ und ist X ein Punct der Polare innerhalb, so geht die Polare von X durch Z, weil wieder die Gerade XZ von der Curve in Puncten getroffen wird, die harmonisch durch XZ getrennt sind. — Liegt Z ausserhalb $K^{(2)}$ und ist Y ein Punct der Polare z, der auch ausserhalb liegt, so ziehen wir (Fig. 19, Taf. V) von Y die Secante $YBA(p)$, und dann die Secanten ZA, ZB die die Curve bez. noch in D und C treffen. Alsdann müssen sich die Geraden (CD), (AB) auf der Polare z von Z schneiden, und da z, und (AB) nur den Punct Y gemein haben, so muss auch (CD) durch Y gehen. Schneiden sich (BD) und (CA) in X, so liegt X auf z und XYZ bilden als Nebenecken eines $K^{(2)}$ eingeschriebenen Vierecks ein Polardreieck. Die Polare y von Y, die Gerade YZ geht durch Z. Also allgemein: Liegt ein Punct X auf der Polare von Z, so geht die Polare von X durch Z, unabhängig von der Lage dieser Puncte innerhalb oder ausserhalb $K^{(2)}$.

Nennt man zwei Puncte PQ conjugirt, wenn der eine auf der Polare des andern liegt, so folgt aus den voraufgehenden Betrachtungen der Satz: *Ist ein Punct P einem Puncte Q conjugirt, so ist auch Q dem Puncte P conjugirt.*

Für den Fall, dass P und Q ausserhalb $K^{(2)}$ liegen, wollen wir noch einen Beweis dieses Satzes erbringen. — Q liege (Fig. 27, Taf. VII) auf der Polare p von P. Es giebt, weil P und Q ausserhalb liegen, von P und Q Tangenten an $K^{(2)}$, die bez. mit ab und cd bezeichnet werden mögen, p geht durch die Berührungspuncte AB der Tangenten ab. Ein Punct der Polare von Q wird gefunden, wenn man eine Secante $p(AB)$ von Q an die Curve legt und den Schnittpunct der Tangenten ab in AB bestimmt. Dieser Punct ist der Punct P, er liegt auf der Polare von Q. Die Polare q von Q geht ausserdem durch die Berührungspuncte CD der Tangenten cd von Q an die Curve.

Von den Ecken eines Polardreiecks liegt eine innerhalb, zwei ausserhalb $K^{(2)}$. Liegt eine Ecke, etwa X, innerhalb, so giebt es von ihr aus keine Tangenten an die Curve, die Polare trifft also die Curve nicht, sie liegt ganz ausserhalb. Die beiden andern Ecken liegen auf ihr, sie liegen also ausserhalb, woraus

fliesst, dass nicht mehr als eine Ecke innerhalb liegen kann. Liegen aber zwei Ecken, etwa YZ, ausserhalb, so kann ihre Verbindungslinie x die Curve $K^{(2)}$ nicht treffen, weil sonst XY durch die Schnittpuncte (harmonisch) getrennt sein müssten, also nicht beide ausserhalb liegen könnten. Es muss demnach x die Polare eines Punctes innerhalb $K^{(2)}$ sein, so dass also die dritte Ecke innerhalb liegen muss.

Es sei $B^{(2)}$ ein Büschel zweiter Ordnung, der sich auf die Curve $K^{(2)}$ stützt. Wählt man (Fig. 19, Taf. V) auf einer Geraden z zwei Puncte R und S, durch welche die zu $B^{(2)}$ gehörenden Strahlen, oder die Curventangenten bc und ad gehen, so bestimmen die Schnittpuncte $ac(V)$, $bd(U)$ eine Gerade x, die Schnittpuncte $ab(P)$, $cd(Q)$ eine Gerade y, die sich in $Z(xy)$ schneiden. Z heisst der Pol der Geraden z in Bezug auf den Büschel $B^{(2)}$ oder in Bezug auf dessen Stützcurve $K^{(2)}$. — Die Puncte $PZQX$ sind harmonische wegen ihrer Lage im Vierseit $abcd$, also sind auch die Strahlen $bzcl$ harmonische, wenn (RZ) mit l bezeichnet wird.

Der Pol ist von der Wahl der Puncte RS unabhängig, er ist schon durch R allein völlig bestimmt. Denn nach dem Mac Laurin'schen Satze (Seite 45) geht die Verbindungslinie BC durch den Pol, und da er ausserdem von $L(rx)$ durch BC harmonisch getrennt ist, so ist er eindeutig bestimmt. Hält man daher zuerst R fest, und lässt S auf z laufen, so bleibt Z unverändert, hält man sodann in irgend einer Lage S fest und lässt R laufen, so bleibt Z derselbe Punct.

Man sagt die Gerade z sei von ihrem Pol Z harmonisch durch $B^{(2)}$ oder $K^{(2)}$ getrennt, und spricht damit aus, dass jeder Punct P auf z, durch welchen zwei Strahlen des Büschels $B^{(2)}$, oder was dasselbe ist, zwei Tangenten an $K^{(2)}$ gehen, als Träger eines harmonischen Büschels angesehen werden kann, in dem die Tangenten zugeordnete Strahlen sind, und die Gerade z und die Gerade PZ die andern zugeordneten Strahlen sind. — *Alle geraden Linien, die durch $B^{(2)}$ oder $K^{(2)}$ von einer Geraden z harmonisch getrennt sind, gehen durch einen Punct, den Pol von z.* Liegt z ganz ausserhalb $K^{(2)}$, d. h. trifft z die Curve $K^{(2)}$ nicht, so bilden die von z durch $K^{(2)}$ harmonisch getrennten Geraden einen vollständigen Büschel, trifft aber die Gerade z $K^{(2)}$. so bedecken jene Geraden nur denjenigen Theil des Büschels mit dem Träger Z, der zwischen den beiden Tangenten durch Z und ausserhalb $K^{(2)}$ liegt.

In der Mac Laurin'schen Configuration (Fig. 19, Taf. V) ist X der Pol von x, Y der Pol von y. Die Geraden xyz bilden

ein Polardreiseit, die Ecken sind die Pole der gegenüberliegenden Seiten. Man gewinnt daraus den Satz: *Die Nebenseiten eines einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen, oder, was dasselbe ist, eines aus vier Strahlen eines Büschels* $B^{(2)}$ *gebildeten Vierseits, bilden ein Polardreiseit.*

Nach den Mac Laurin'schen Sätzen über das eingeschriebene Viereck und das in den Ecken umschriebene Vierseit ist das Dreieck XYZ und das Dreiseit xyz ein und dieselbe Figur. Daraus folgt: *in einem Polardreieck sind die Ecken die Pole der gegenüberliegenden Seiten, und die Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken.* Und zweitens: *Ist* p *die Polare von* P, *so ist* P *der Pol von* p.

Zwei gerade Linien heissen für einen Büschel $B^{(2)}$ oder dessen Stützcurve $K^{(2)}$ conjugirt, wenn die eine den Pol der andern enthält.

Ist eine Gerade p *einer Geraden* q *conjugirt, so ist auch* q p *conjugirt.*

Wir können den Beweis dieses Satzes, der dem von den conjugirten Puncten dualistisch gegenübersteht, unterdrücken, weil er dem Beweise jenes Satzes ganz analog ist.

Aufgabe. Den Pol einer Geraden z zu construiren, wenn $K^{(2)}$ durch fünf Tangenten oder durch fünf Puncte gegeben ist. — Es seien $abcde$ die fünf Tangenten, durch die Puncte (az) (bz) gehen noch die Tangenten a', b', die der Brianchon'sche Satz linear liefert. Hat man diese gezeichnet, so construire man die Geraden lm so, dass $ala'z$, $bmb'z$ harmonische Büschel sind. Der Schnittpunct (lm) ist der Pol von z. Sind aber fünf Puncte gegeben, so construire man zu zwei Puncten XY von z die Polaren xy (Seite 57), ihr Schnitt ist der Pol von z. Wollte man erst zu den fünf Puncten mit dem Pascal'schen Satze die fünf Tangenten construiren, so würde man eine complicirtere Lösung erhalten.

Die Polaren der Puncte einer Geraden gehen durch einen Punct, den Pol der Geraden, denn er ist allen Puncten der Geraden conjugirt.

Die Pole aller Geraden durch einen Punct liegen auf einer Geraden, der Polare des Punctes, denn sie ist jeder Geraden durch den Punct conjugirt.

Die Polaren der Puncte einer Tangente gehen durch den Berührungspunct, er ist der Pol der Tangente. Die Pole der Geraden durch einen Curvenpunct (durch einen Stützpunct des

Büschels $B^{(2)}$) liegen auf der Tangente dieses Punctes, sie ist die Polare des Curvenpunctes.

Zu einem Puncte A giebt es auf einer Geraden b durch diesen Punct nur einen ihm conjugirten, es ist der Schnittpunct der Polare a von A mit b. Ist A ein Curvenpunct, so ist der A auf einer Geraden b conjugirte A selbst, nur wenn b die Tangente ist, so ist A allen Puncten von b conjugirt.

Durch einen Punct B auf einer Geraden a giebt es im Allgemeinen nur eine a conjugirte Gerade, die Verbindungslinie von B mit dem Pol A von a. Ist a eine Tangente, so liegt ihr Pol auf ihr, und die B conjugirte Gerade ist a selbst. Ist aber B der Berührungspunct, so ist der Geraden a jede Gerade durch B conjugirt.

Die Puncte einer Curve $K^{(2)}$ sind sich selbst conjugirt, und sich selbst conjugirte Puncte sind Curvenpuncte. Die Strahlen eines Büschels $B^{(2)}$ oder die Tangenten seiner Stützcurve $K^{(2)}$ sind sich selbst conjugirt, und sich selbst conjugirte gerade Linien sind Strahlen von $B^{(2)}$ (Tangenten an $K^{(2)}$).

Die Aufgabe, die Puncte zu finden, die von einem gegebenen durch eine Curve zweiter Ordnung harmonisch getrennt sind, lässt eine natürliche Erweiterung zu zu der Aufgabe:

Legt man (Fig. 28, Taf. VII) durch einen Punct P Secanten $ss_1s_2\,..$ an eine Curve $K^{(2)}$ zweiter Ordnung, die die Curve bez. in AB, A_1B_1, $A_2B_2,\,..$ treffen, so soll der Ort der Puncte $XX_1X_2\,..$ gefunden werden, wenn $ABPX$, $A_1B_1PX_1$, $A_2B_2PX_2,\,..$ einem gegebenen Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv sind. Auf jeder Secante wird es zwei Puncte X geben, weil AB mit einander vertauscht werden können. — Die projectiven Gebilde $ABPX$, $A_1B_1PX_1\,..$ sind zu je zweien einander perspectiv, weil sie den Punct P entsprechend gemein haben. Also gehen die Geraden $(A_\mu A_\nu)$, $(B_\mu B_\nu)$, $(X_\mu X_\nu)$ durch einen Punct, und zwar, weil $A_\mu A_\nu B_\mu B_\nu$ ein eingeschriebenes Viereck ist, durch einen Punct der Polare p von P. Daraus folgt, dass $A_\mu(AA_1A_2\,..) \overline{\overline{\wedge}}\, X_\mu(XX_1X_2\,..)$, $A_\nu(A_1A_2A_2\,..) \overline{\overline{\wedge}}\, X_\nu(XX_1X_2\,..)$ ist, weil sich die entsprechenden Strahlen auf einer Geraden schneiden. Weiter ist $A_\mu(AA_1A_2\,..) \overline{\wedge}\, A_\nu(AA_1A_2\,..)$, weil $AA_1A_2\,..$ $A_\mu A_\nu\,..$ Puncte einer Curve zweiter Ordnung sind, und folglich ist $X_\mu(XX_1X_2\,..) \overline{\wedge}\, X_\nu(XX_1X_2\,..)$. Der Ort der Puncte X ist demnach eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}$. Trifft p die Curve $K^{(2)}$, so sind die durch diese Puncte gehenden Secanten s Tangenten an $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$, die Curven berühren sich doppelt. Denn während es auf jeder Secante s zwei Puncte X giebt, so giebt es auf diesen beiden ($K^{(2)}$ berührenden) Geraden durch P nur einen Punct X.

Dualistisch hierzu hat man den Satz. Bestimmt man in jedem Puncte einer Geraden p die beiden Strahlen ab eines Büschels $B^{(2)}$, die durch ihn gehen, und construirt man die Gerade x so, dass $abpx$ einem gegebenen Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv sind, so liegen die Geraden x in einem Büschel zweiter Ordnung. Liegen auf p Stützpuncte des Büschels $B^{(2)}$, so berühren sich die Stützcurven der beiden Büschel doppelt.

Die Puncte einer Geraden y sind ihren Polaren projectiv, und die Strahlen eines linearen Büschels sind ihren Polen projectiv.

Dass die Polaren der Puncte von y einen linearen Büschel bilden mit dem Pol Y von y als Träger, wissen wir. Sind nun ABC.. Puncte auf y und abc.. ihre Polaren, so bestimmen diese die ihnen conjugirten $A'B'C'$.. auf y. Trifft y die Curve in den Puncten LM, so sind $LAMA'$, $LBMB'$, $LCMC'$,.. harmonische Reihen, und folglich (siehe Seite 22) ist $ABC.. \barwedge A'B'C'..$ Trifft aber y die Curve $K^{(2)}$ nicht, so hat man (Fig. 30, Taf. VIII) identisch $Y(QCRVR_1V_1..) \barwedge Y(QDSUS_1U_1..)$ worin $RR_1R_2..$, $VV_1V_2..$, $SS_1S_2..$, $UU_1U_2..$ dadurch entstehen, dass T durch $T_1T_2..$ auf y ersetzt wird, wodurch a in $a_1a_2..$, b in $b_1b_2..$ übergehen. Nun sind die Punctreihen $QDSUS_1U_1S_2U_2..$, $CQVRV_1R_1V_2R_2..$ einander projectiv, weil sie auf zwei festen Tangenten durch eine bewegliche bestimmt werden. Folglich ist $Y(QCRVR_1V_1..) \barwedge Y(CQVRV_1R_1..)$. Es sind aber die Geraden YQ, YC, YR, YV, YR_1, YV_1.. bez. den Geraden YC, YQ, YV, YR, YV_1, YR_1.. conjugirt, weil sie Nebenseiten von $K^{(2)}$ umschriebenen Vierseiten, also Seiten von Polardreiecken sind, deren dritte Seite y ist. Die conjugirten Geraden durch Y bestimmen auf y conjugirte Puncte, folglich sind auch die letzteren einander projectiv.

Die Sätze, conjugirte Gerade durch einen Punct stehen in projectiver Beziehung zu einander, und conjugirte Puncte auf einer Geraden stehen in projectiver Beziehung zu einander, bedeuten dasselbe als die eben erwiesenen.

Dass auch die Puncte einer Tangente ihren Polaren projectiv sind, ist bereits auf Seite 46 nachgewiesen.

Durchläuft ein Punct eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so durchlaufen die Polaren dieses Punctes, gebildet für eine Curve zweiter Ordnung Ξ, einen Strahlbüschel zweiter Ordnung $B^{(2)}$. — Denn projicirt man die Curve $K^{(2)}$ von zweien ihrer Puncte SS' durch die Büschel $S(ABC..) \barwedge S'(ABC..)$ so gehen die Polaren von ABC.. durch die Pole der Geraden SA, SB, SC,.. auf der Polare s von S und durch die Pole der Geraden $S'A$, $S'B$, $S'C$,..

auf der Polare s' von S', und die Punctreihen auf s und s' sind einander projectiv. Die Polaren $abc\,..\, ss'\,..$ von $ABC\,..\, SS'\,..$ in Bezug auf Ξ bestimmen auf zweien unter ihnen, auf ss', projective Punctreihen, bilden also einen Büschel zweiter Ordnung $B^{(2)}$. Dieser Büschel kann der Polarbüschel von $K^{(2)}$ in Bezug auf Ξ genannt werden, und die Stützcurve $\mathfrak{K}^{(2)}$ des Büschels $B^{(2)}$ kann die Polarcurve von $K^{(2)}$ genannt werden. — Ebenso bilden die Pole eines Büschels $B^{(2)}$, gebildet für eine Curve Ξ zweiter Ordnung, eine Curve zweiter Ordnung, die die Polarcurve von $B^{(2)}$, und deren Tangentenbüschel der Polarbüschel von $B^{(2)}$ genannt werden kann.

Bilden wir zu jedem Puncte seine Polare, zu jeder Geraden ihren Pol für eine bestimmte Curve Ξ zweiter Ordnung, so entsprechen geraden Punctreihen Strahlen durch einen Punct, harmonischen Puncten harmonische Strahlen. Es entsprechen Geraden durch einen Punct Puncte auf einer Geraden, harmonischen Strahlen harmonische Puncte, einem Wurfe von vier Strahlen entspricht ein ihm projectiver Wurf von vier Puncten. Einem n-Eck entspricht ein n-Seit, den Nebenecken entsprechen Nebenseiten. Projectiven Büscheln entsprechen projective Punctreihen, projectiven Punctreihen projective Büschel. Ist irgend eine Configuration gegeben, bestehend aus Puncten, Geraden, linearen Büscheln, geraden Punctreihen, Curven zweiter Ordnung, Büscheln zweiter Ordnung, Tangenten, Stützpuncten, Polen und Polaren, conjugirten Puncten oder conjugirten geraden Linien für eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so erhält man dadurch, dass man mittels der Curve Ξ diese Configuration so zu sagen abbildet, in dem man zu jedem Puncte die Polare, zu jeder Geraden den Pol in Bezug auf Ξ construirt, eine neue Configuration, bestehend aus Geraden, Puncten, geraden Punctreihen, linearen Büscheln, Büscheln zweiter Ordnung, Curven zweiter Ordnung, Stützpuncten, Tangenten, Polaren und deren Polen, conjugirten Geraden und conjugirten Puncten für die Polarcurven $\mathfrak{K}^{(2)}$ von $K^{(2)}$, und alle projectiven Eigenschaften der ersten Configuration finden sich in der zweiten wieder, weil eben projectiven Gebilden projective im Bilde entsprechen. Es ergiebt sich hieraus, dass die dualistisch gegenüberstehenden Sätze, die wir fortlaufend bisher nebeneinander stellten und bewiesen, eines solchen doppelten Beweises nicht mehr bedürfen. Alle projectiven Aussagen, die über die eine Configuration beigebracht werden, lassen sich ohne weiteres dualistisch umsetzen und gelten für die abgebildete Configuration, wenn sie für die Mutterconfiguration gelten. Dies ist das auf

Seite 7 schon angekündigte Princip der Dualität. Dualistisch gegenüberstehende Configurationen werden zuweilen auch als reciprok verwandt bezeichnet.

Die Curve zweiter Ordnung, auf die sich eine dualistische Verwandtschaft stützt, wird auch die Kerncurve des Polarsystems genannt, welches mit der Verwandtschaft identisch ist. In einem Polarsystem sind die Puncte der Ebene den Geraden derselben Ebene so zugeordnet, dass jedem Puncte eine Gerade (Polare), jeder geraden Punctreihe ein Strahlbüschel oder dessen Träger, der Pol des Trägers der Punctreihe entspricht. Die Strahlen des Büschels sind den Puncten der Reihe projectiv zugeordnet. Fragt man nun, ob in einer solchen dualistischen Verwandtschaft nothwendig eine Kerncurve, eine Curve zweiter Ordnung, vorhanden sein muss, deren Puncte und Tangenten sich in dieser Verwandtschaft entsprechen, — eine Frage, deren vollständige Untersuchung im Rahmen dieser Schrift nicht Platz haben wird — so erhält man eine verneinende Antwort. Eine dualistische Verwandtschaft wird dann ein Polarsystem genannt, wenn stets der einer geraden Punctreihe zugehörige Strahlbüschel mit der Punctreihe involutorisch liegt, d. h. wenn die Polare a eines jeden Punctes A auf einer Geraden g auf dieser Geraden einen Punct A' bestimmt, dessen Polare a' durch A geht. Selbst ein solches Polarsystem besitzt nicht immer eine Kerncurve, wenigstens nicht immer eine reale. Das Polarsystem kann aber dazu benutzt werden, ideale Curven zweiter Ordnung zu definiren. Solche ideale Gebilde werden später besprochen werden. Ich begnüge mich, das Vorhandensein dieser Frage angedeutet zu haben, eine vollständige Discussion derselben liegt nicht in meinem Plane. —

Legt man durch einen Punct P Secanten $ss_1s_2 \ldots$ an eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, die diese bez. in AB, A_1B_1, $A_2B_2 \ldots$, eine Gerade g aber in den Puncten $YY_1Y_2 \ldots$ treffen, und bestimmt man die Puncte $XX_1X_2 \ldots$ so, dass die Würfe $AXBY$, $A_1X_1B_1Y_1$, $A_2X_2B_2Y_2 \ldots$ harmonische sind, so liegen die Puncte X auf einer Curve $\mathfrak{K}^{(2)}$ zweiter Ordnung, die durch P geht. — Denn (Fig. 31, Taf. VIII) X liegt auf der Polare y von Y, X_1 auf der Polare y_1 von Y_1, X_2 auf der von Y_2 u. s. w. Die Polaren $yy_1y_2 \ldots$ gehen durch den Pol G von g und sind der Punctreihe $YY_1Y_2 \ldots$ projectiv, und da diese Reihe den Strahlen $ss_1s_2 \ldots$ perspectiv liegt, so ist $ss_1s_2 \ldots \overline{\wedge}\, yy_1y_2 \ldots$, die Schnittpuncte $XX_1X_2 \ldots$ der entsprechenden Strahlen dieser Büschel liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, die die Puncte P und G enthält. Trifft die Polare

p von P, und trifft die Gerade g die Curve $K^{(2)}$, so sind diese Linien gemeinsame Sehnen der Curven $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$.

Liegt P ausserhalb $K^{(2)}$, so hat $\mathfrak{K}^{(2)}$ auch Puncte auf Geraden s durch P die $K^{(2)}$ nicht treffen. Die Puncte X müssen dann aber (so lange nicht harmonische Würfe mit idealen Elementen eingeführt sind) anders definirt werden. Ein Punct X ist dann der Punct auf der durch P gehenden Geraden s, der dem Schnittpunct $Y(gs)$ für die Curve $K^{(2)}$ conjugirt ist.

Das Princip der Dualität liefert den Satz: Bestimmt man zu jedem Strahle yy_1y_2.. eines linearen Büschels G die Strahlen xx_1x_2.., die sich mit yy_1y_2.. bez. auf einer Geraden p schneiden, und ihnen für eine Curve $K^{(2)}$ conjugirt sind, so liegen die Strahlen x in einem Büschel $\mathfrak{B}^{(2)}$, sind Tangenten einer Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}$.

Die Paare xy conjugirter gerader Linien durch zwei Puncte P und Q schneiden sich auf einer Curve zweiter Ordnung, die die Puncte P und Q enthält. — Denn die Pole der Geraden x sind diesen Geraden projectiv, liegen in einer Geraden und sind den Geraden y perspectiv. Also sind die Strahlen x den Strahlen y projectiv. Soll die Gerade PQ sich selbst entsprechen, so müssen PQ auf einer Tangente liegen. — Die Dualität giebt den Satz:

Die Paare einander conjugirter Puncte XY auf zwei Geraden pq bestimmen durch ihre Verbindungslinien einen Büschel zweiter Ordnung. — Der Büschel artet aus, wenn sich pq in einem Puncte der Curve schneiden für die XY conjugirt sind.

Die Geraden x, die eine Curve $K^{(2)}$ und ein Geradenpaar gg' in harmonischen Puncten schneiden, so dass die Curvenpuncte zugeordnete sind, stützen sich auf eine Curve zweiter Ordnung. — Denn sind ABC.. Puncte auf g und treffen die in Bezug auf $K^{(2)}$ construirten Polaren abc.. dieser Puncte die Gerade g' in den Puncten $A'B'C'$.., so sind die Geraden AA', BB', CC',.. die verlangten Geraden x, und da $ABC.. \,\overline{\wedge}\, A'B'C'$.. ist, so erzeugen sie einen Büschel zweiter Ordnung. — Der dualistische Satz lautet: Die Puncte X, in denen die Tangenten an eine Curve $K^{(2)}$ und die Geraden XG, XG', wenn GG' gegebene Puncte sind, harmonische Büschel bilden, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung.

Lehrsatz. *Zwei Dreiecke, die in Bezug auf dieselbe Curve zweiter Ordnung Polardreiecke sind, bilden ein Pascal'sches Sechsecksechsseit und ein Brianchon'sches Sechsseitsechseck, sie sind einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben und einer andern umschrieben.*

Beweis. Der Pol von (SA') (Fig. 32, Taf. VIII) liegt auf der Polare von A', auf $(S'B')$, also projicirt $(S'B')$ den Pol von (SA'), oder $(S'B')$ und (SA') sind conjugirt. Ebenso sind (SA) und $(S'B)$ conjugirt. Demnach ist $S(ABA'B') \barwedge S'(BAB'A') \barwedge S'(ABA'B')$, also ist $S(ABA'B') \barwedge S'(ABA'B')$. Die Puncte $SS'ABA'B'$ liegen auf einer Curve zweiter Ordnung. Der zweite Theil des Satzes folgt aus dem Princip der Dualität von selbst. — Wichtig ist auch die Umkehrung dieses Satzes, der Beweis derselben muss jedoch verschoben werden.

Wir fanden (auf Seite 51) dass zwei projective Punctreihen $ABC\,.\,.$, $A'B'C'\,.\,.$ auf einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ eine Perspectivitätsachse besitzen. Hingegen gehen die Verbindungslinien entsprechender Puncte nicht durch einen Punct, sondern sie stützen sich im Allgemeinen auf eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}$ und gehen nur in besonderen Fällen durch einen Punct, in denen sie perspectiv oder involutorisch liegend heissen. — Ist g (Fig. 33, Taf. VIII) die Perspectivitätsachse, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen der Büschel $A(A'B'C'\,.\,.)$, $A'(ABC\,.\,.)$ auf ihr in Puncten $\alpha\beta\gamma\,.\,.$, und es ist, wenn LL' beliebige Puncte auf $K^{(2)}$ sind, $L(A'B'C'\,.\,.) \barwedge L'(ABC\,.\,.) \barwedge \alpha\beta\gamma\,.\,.$ Sind aber LL' entsprechende Puncte der krummen projectiven Punctreihen, so schneiden sich auch die entsprechenden Strahlen der Büschel $L'(ABC\,.\,.)$, $L(A'B'C'\,.\,.)$ auf g in Puncten $\alpha'\beta'\gamma'\,.\,.$ und es ist $\alpha\beta\gamma\,.\,. \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\,.\,.$ Werden die Verbindungslinien AA', BB', $CC'\,.\,.$, LL', $MM'\,.\,.$ mit $abc\,.\,.\;lm\,.\,.$ bezeichnet, so sind $\alpha'\beta'\gamma'\,.\,.$ und die Schnittpuncte $(la)\,(lb)\,(lc),\,.\,.$ als Nebenecken $K^{(2)}$ eingeschriebener Vierecke conjugirte Puncte. Es ist also $\alpha'\beta'\gamma'\,.\,. \barwedge l(abc\,.\,.) \barwedge \alpha\beta\gamma\,.\,.$ Aus gleichen Gründen ist $m(abc\,.\,.) \barwedge \alpha\beta\gamma\,.\,.$, und demnach $l(abc\,.\,.) \barwedge m(abc\,.\,.)$. Also bestimmen die Verbindungslinien entsprechender Puncte auf zweien unter ihnen projective Punctreihen, sie bilden einen Büschel zweiter Ordnung, w. z. b. w.

Sind die Punctreihen $ABC\,.\,.$, $A'B'C'\,.\,.$ auf $K^{(2)}$ perspectiv, so sei G das Perspectivitätscentrum (Fig. 34, Taf. VIII), es ist der Pol der Perspectivitätsachse g. Bildet man den Büschel $G(AA'BB'\,.\,.)$ und den Büschel $G(A'AB'B\,.\,.)$, so sind beide identisch. Folglich ist die projective Verwandtschaft eine solche, dass $AA'BB'CC'\,.\,. \barwedge A'AB'BC'C\,.\,.$ ist, die Puncte liegen, wie man sagt, involutorisch, ein Begriff, der uns im nächsten Kapitel beschäftigen wird. — Sind zwei krumme Punctreihen $ABC\,.\,.$, $A'B'C'\,.\,.$ einander so projectiv, dass $ABCA'B'C'\,.\,. \barwedge A'B'C'ABC\,.\,.$, oder wie man lieber schreibt, ist $AA'BB'CC'\,.\,. \barwedge A'AB'BC'C\,.\,.$, so sind die Gebilde perspectiv. Denn die Geraden $(AB')\,(A'B)$ schneiden

sich auf der Perspectivitätsachse g, und die Geraden $(AB)(A'B')$ ebenfalls. Daraus folgt, dass die Geraden $(AA')(BB')$ durch den Pol der Perspectivitätsachse gehen. Also die Verbindungslinien aller Paare entsprechender Puncte gehen durch einen Punct, den Pol G der Perspectivitätsachse g. — Projicirt man von einem Puncte G aus die Puncte einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, und treffen die Projectionsstrahlen die Curve in AA', BB', CC',.. so ist $ABC..\ A'B'C'.. \barwedge A'B'C'..\ ABC..$ oder $AA'BB'CC'.. \barwedge A'AB'BC'C..$ Denn die entsprechenden Strahlen der Büschel $A(A'B'C'..\ ABC..)$, $A'(ABC..\ A'B'C'..)$ schneiden sich auf der Polare g von G, — so construirt man ja die Polare — also auf einer Geraden, sie sind perspectiv, also sind die krummen Punctreihen einander involutorisch projectiv, sie sind einander perspectiv. — Unter den Strahlen AA, $A'A'$ hat man die Tangenten in diesen Puncten zu verstehen.

Projicirt man (Fig. 35, Taf. VIII) die Puncte $ABCD..$ einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ auf die Puncte $A_1B_1C_1D_1..$ derselben Curve von G aus, und diese nach $A_2B_2C_2D_2..$ von G_1 aus, diese nach $A_3B_3C_3D_3..$ von G_2 aus u. s. w., die Puncte $A_nB_nC_nD_n..$ von G_n aus auf die Puncte $A'B'C'D'..$ der Curve $K^{(2)}$, so sind die Punctreihen $ABCD..$, $A'B'C'D'..$ einander projectiv, was nicht erst bewiesen zu werden braucht. Soll der Punct X der Reihe $ABCD..$ so gewählt werden, dass der entsprechende Punct X' der Reihe $A'B'C'..$ auf X selbst fällt (Aufgabe des Ottajano), so hat man in der projectiven Verwandtschaft $ABC.. \barwedge A'B'C'..$ die sich selbst entsprechenden Elemente zu suchen, d. h. man hat die Schnittpuncte ihrer Perspectivitätsachse mit der Curve $K^{(2)}$ zu bestimmen. Beträgt die Zahl der Puncte G mehr als drei, so wird man zu verschiedenen Resultaten kommen, wenn man die Puncte verschieden numerirt. In besonderen Fällen können die Puncte $A'B'C'..$ auf ihre entsprechenden fallen, dann hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Es liegen dann $ABC..$ und $A_nB_nC_n..$ perspectiv. Für den Fall, dass drei Puncte G gegeben sind, ist diese Aufgabe, also die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch die drei Puncte $GG'G''$ gehen, und dessen Ecken auf einer Curve $K^{(2)}$ liegen, die zwei Lösungen hat, in Fig. 36, Taf. IX gelöst.

Projicirt man (Fig. 37, Taf. IX) von G aus die Puncte $ABC..$ nach $A_1B_1C_1..$, $A_1B_1C_1..$ von G_1 aus nach $A_2B_2C_2..$ auf $K^{(2)}$, und liegen $ABC..$, $A_2B_2C_2..$ perspectiv, so bilden die Perspectivitätscentren — auch Involutionscentren genannt — GG_1G_2 ein Polardreieck für $K^{(2)}$. Denn projicirt man von G den Punct

A_1, von G_1 den Punct A, so treffe G_1A die Curve in α. Projicirt man diesen Punct von G und geht $(G\alpha)$ durch A_3, so muss G_1A_3 durch A_1 gehen nach der Voraussetzung, also muss A_3 auf A_2 fallen. Es bilden $A_1\alpha$ ein Paar in den projectiven Reihen $ABC\ldots, A_2B_2C_2\ldots$ Die Verbindungslinien $(AA_2)(\alpha A_1)$ liefern das Perspectivitätscentrum G_2 der krummen Reihen $ABC\ldots, A_2B_2C_2\ldots$ und da GG_1G_2 Nebenecken eines eingeschriebenen Vierseits sind, so bilden sie ein Polardreieck.

Umgekehrt, sind GG_1 conjugirte Puncte, so liegen die Punctreihen $ABC\ldots, A_2B_2C_2\ldots$ perspectiv, wenn $(AA_1)(BB_1)\ldots$ durch G, $(A_1A_2)(B_1B_2)\ldots$ durch G_1 gehen. Denn zieht man die Geraden GAA_1, $A_1A_2G_1$, $A_2\alpha G$, $A\alpha\Gamma$, wo Γ der Schnitt von $(A\alpha)$ mit (A_1A_2) ist, so sind G und Γ conjugirte Puncte als Nebenecken eines eingeschriebenen Vierecks. Dem Puncte G ist aber auf A_1A_2 nur ein einziger Punct conjugirt, der nach Voraussetzung G_1 ist, es muss demnach Γ auf G_1 fallen, $A\alpha G_1$ liegen in einer Geraden. Dem Puncte A entspricht der Punct A_2, und dem Puncte A_2 entspricht der Punct A. Ebenso entspricht B B_2 und B_2 B u. s. w. Es ist $AA_2BB_2CC_2\ldots \barwedge A_2AB_2BC_2C\ldots$, diese Gebilde sind demnach einander perspectiv. Die Ottajano'sche Aufgabe wird unbestimmt, wenn die drei Puncte, durch die die Seiten eines einer Curve zweiter Ordnung eingeschriebenen Dreiecks gehen sollen, ein Polardreieck für diese bilden.

Liegen auf einer Curve $K^{(2)}$ zwei projective Punctreihen $ABC\ldots \barwedge A'B'C'\ldots$ so lassen sich die Puncte $\alpha\beta\gamma\ldots$ auf unendlich viele Arten so wählen, dass gleichzeitig $ABC\ldots \overline{\barwedge}\ \alpha\beta\gamma\ldots \overline{\barwedge}\ A'B'C'\ldots$ ist. — Man wähle α (Fig. 38, Taf. IX) willkürlich und bezeichne (αA) mit a, $(\alpha A')$ mit a'. Projicirt man von den entsprechenden Puncten B und B' aus die Puncte $XX'X''\ldots$ der Curve $K^{(2)}$ nach $A_xA_{x'}A_{x''}\ldots$ auf a und nach $A'_xA'_{x'}A'_{x''}\ldots$ auf a', so ist $A_xA_{x'}A_{x''}\ldots \barwedge A'_xA'_{x'}A'_{x''}\ldots$, und α ist in diesen Reihen ein sich selbst entsprechender Punct, so dass sie perspectiv sind. Projicirt man $A_xA_{x'}\ldots$ von C auf $K^{(2)}$ nach $YY'Y''\ldots$ auf $K^{(2)}$, $A'_xA'_{x'}\ldots$ von dem entsprechenden Punct C' nach $ZZ'Z''\ldots$ auf $K^{(2)}$, so ist $YY'\ldots \barwedge ZZ'\ldots$, und der Punct α ist wieder ein sich selbst entsprechender Punct in diesen Reihen. Ist γ der zweite sich selbst entsprechende Punct dieser krummen Reihen, so liefert $C\gamma$ auf a einen Punct G, von dem $ABC\ldots$ nach Puncten $\alpha\beta\gamma\ldots$ auf $K^{(2)}$ projicirt werden, und $C'\gamma$ liefert auf a' einen Punct G', von dem aus die Puncte $A'B'C'\ldots$ nach denselben Puncten $\alpha\beta\gamma\ldots$ projicirt werden, so dass $ABC\ldots \overline{\barwedge}\ \alpha\beta\gamma\ldots \overline{\barwedge}\ A'B'C'\ldots$ ist. Denn die Puncte GG' sind in den Reihen $A_xA_{x'}\ldots$ und $A'_xA'_{x'}\ldots$ entsprechende, so dass sich

GB, $G'B'$ in einem Puncte β der Curve schneiden. — Da α willkürlich gewählt werden kann, so lässt sich die Construktion auf unendlich viele Arten ausführen.

Projicirt man (Fig. 39, Taf. IX) B' von A aus, B von A' aus, so schneiden sich $(AB')(A'B)$ in einem Puncte H der Perspectivitätsachse der Gebilde $ABC..$, $A'B'C'..$ Aus dem Pascal'schen Sechsecksechsseit $A\alpha A'B\beta B'A$ folgt, dass HGG' auf einer Geraden liegen. Aendert B seine Lage, so ändert auch H seine Lage, während GG' festbleiben, aber H läuft auf einer Geraden. Diese Gerade, als Perspectivitätsachse der Gebilde $ABC..$, $A'B'C'..$ ist von der Wahl des Punctes α unabhängig. Mithin liegen alle Paare von Puncten GG', von denen die krummen Reihen $ABC..$, $A'B'C'..$ auf ein und dieselbe dritte Reihe $\alpha\beta\gamma..$ projicirt werden, auf einer Geraden, der Perspectivitätsachse der gegebenen projectiven krummen Reihen. Die Puncte GG' sind einander projectiv zugeordnet.

Den Sätzen über krumme projective Punctreihen stehen dualistisch die folgenden gegenüber. — Zwei projective Strahlenreihen in einem Büschel zweiter Ordnung sind einem linearen Büschel perspectiv. Das Centrum oder der Träger G des letzteren kann Perspectivitätscentrum der projectiven Strahlenreihen heissen. Ist $abc.. \barwedge a'b'c'..$ in $B^{(2)}$, so sind die Punctreihen $a(a'b'c'..)$, $a'(abc..)$ einander projectiv, und da sie den Punct (aa') entsprechend gemein haben, so sind sie perspectiv, werden von einem Puncte G aus durch dieselben Strahlen aufgenommen. Der Punct G ist von der Wahl der Strahlen aa' unabhängig.

Die entsprechenden Strahlen zweier projectiven Reihen in einem Büschel zweiter Ordnung schneiden sich in einer Curve $\mathfrak{K}^{(2)}$ oder auf einer Geraden. Im letzteren Falle heissen sie perspectiv oder involutorisch, weil $aa'bb'cc'.. \barwedge a'ab'bc'c..$ ist.

Der Aufgabe des Ottajano steht die dualistische gegenüber: Es soll ein n-Seit-n-Eck construirt werden, das einer Curve $K^{(2)}$ umschrieben ist, und dessen n Ecken auf n gegebenen Geraden liegen. — Für den Fall des Dreiecks wird die Aufgabe unbestimmt, wenn die drei Geraden ein Polardreieck für $K^{(2)}$ bilden.

Zu zwei projectiven Strahlenreihen $abc..$, $a'b'c'..$ in einem Büschel $B^{(2)}$ lassen sich auf unendlich viele verschiedene Arten Strahlenreihen $\alpha\beta\gamma..$ angeben, die sowohl $abc..$, als auch $a'b'c'..$ perspectiv liegen. Die zugehörigen Perspectivitätsachsen gg' gehen durch einen Punct, das Perspectivitätscentrum der Reihen $abc..$, $a'b'c'..$, und sind einander projectiv zugeordnet.

Kapitel IV.

Einführung idealer Elemente durch die Involution. Herstellung der Curven zweiter Ordnung aus idealen Elementen. Die absolute Involution. Der Kreis.

Liegen zwei Punctreihen $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ auf einer Curve zweiter Ordnung perspectiv, so findet, wie wir sahen, die eigenthümliche Art des Entsprechens statt, dass $AA'BB'CC'\ldots \barwedge A'AB'BC'C\ldots$ ist, wir nannten diese Beziehung eine involutorische. Immer zwei entsprechende Puncte bilden ein Paar, so dass der Punct A als Punct der ersten Punctreihe einem Puncte A' der zweiten Reihe entspricht, dass aber dem Puncte A' als Punct der ersten Reihe der Punct A als Punct der zweiten Reihe entspricht.*) Analoges findet bei perspectiven Strahlenreihen in einem Büschel zweiter Ordnung statt. Aber auch für gerade Punctreihen und lineare Strahlbüschel führen die Curven zweiter Ordnung auf diese Paarung projectiv entsprechender Elemente, nämlich in den conjugirten Puncten auf einer Geraden oder in den conjugirten geraden Linien durch einen Punct. Zu jedem Puncte A auf einer Geraden g giebt es auf derselben Geraden einen, und wenn g nicht Tangente, A nicht Berührungspunct ist, nur einen ihm conjugirten Punct A'. Die Puncte $ABC\ldots$ auf g sind aber ihren conjugirten $A'B'C'\ldots$ auf g projectiv, und wenn man in der Reihe $ABC\ldots$ auf den Punct A' kommt, der ja auch zu ihr gehört, so ist der ihnen conjugirte und projectiv entsprechende A, so dass $AA'BB'CC'\ldots \barwedge A'AB'BC'C\ldots$ ist. Ebenso ist $aa'bb'cc'\ldots \barwedge a'ab'bc'c\ldots$, wenn aa', bb', $cc'\ldots$ conjugirte Geradenpaare durch einen Punct G sind. Eine projective Beziehung von solcher Beschaffenheit wird eine Paarung oder Involution genannt, Punctpaarung, Strahlenpaarung oder Punctinvolution, Strahleninvolution auf einer Geraden oder in einem Puncte, oder auch auf einer Curve zweiter Ordnung, oder in einem Büschel zweiter Ordnung. Auch der Name Punctsystem und Strahlensystem wird von einigen Autoren für die Paarung in Anwendung gebracht.

Wenn in zwei projectiven Gebilden auf demselben Träger, der auch ein Gebilde zweiter Ordnung sein kann, dem Elemente α des ersten Gebildes das Element α' des zweiten Gebildes ent-

---

*) In neuerer Zeit ist der Name Spiegelung für diese Beziehung vorgeschlagen worden.

spricht, und dem Elemente α' als Element des ersten Gebildes das Element α als Element des zweiten Gebildes entspricht, wenn $\alpha\alpha'$ ein Paar bilden, wobei $\alpha\alpha'$ nicht zusammenfallen dürfen, so bilden alle entsprechenden Elemente Paare, die Gebilde sind in Involution. Man schreibt eine solche Projectivität nicht bloss in der gewöhnlichen Weise $\alpha\alpha'\beta\beta'\ldots \overline{\wedge}\, \alpha'\alpha\beta'\beta\ldots,$ sondern man bezeichnet diese Art des Entsprechens auch so:

$$\alpha\alpha' . \beta\beta' . \gamma\gamma' ..$$

und wenn sich selbst entsprechende Elemente λ, μ vorkommen so:

$$\lambda . \mu . \alpha\alpha' . \beta\beta' \ldots,$$

(genauer werden wir oft schreiben $\lambda\lambda . \mu\mu . \alpha\alpha'\ldots$) und nennt das Gebilde eine Involution. Ursprünglich ist dieser Name wohl nur auf ein Gebilde von sechs Elementen bezogen worden, besonders fruchtbar wird dieser Begriff aber erst in der jetzigen Fassung. Natürlich ist es auch in dieser Fassung möglich und oft nützlich, von sechs Elementen in Involution zu reden.

Ist $\alpha\alpha'\beta\beta'\ldots \overline{\wedge}\, \alpha'\alpha\beta'\xi\ldots,$ so ist nach dem Satze von der Invarianz eines Wurfes bei doppelter Elementenvertauschung (S. 27) $\alpha\alpha'\beta\beta' \overline{\wedge}\, \alpha\alpha'\xi\beta'$, und es muss nach dem Fundamentalsatz der Projectivität ξ auf β fallen, so dass $\beta\beta'$ ein Paar bilden, wenn $\alpha\alpha'$ ein Paar bilden. Man nennt wohl die Elemente eines Paares einander conjugirt, da aber dieses Wort schon eine bestimmte Bedeutung in der projectiven Geometrie hat, so wollen wir α' das α gepaarte Element nennen.

Eine Involution ist durch zwei Paare vollständig bestimmt. Dies gilt auch dann, wenn ein Paar, oder beide Paare aus sich selbst entsprechenden Elementen bestehen. — Denn sind $\alpha\alpha' . \beta\beta'$ oder $\lambda\lambda . \alpha\alpha'$ die beiden Paare, so ist die projective Verwandtschaft $\alpha\alpha'\beta\ldots \overline{\wedge}\, \alpha'\alpha\beta'\ldots$ oder $\lambda\alpha\alpha'\ldots \overline{\wedge}\, \lambda\alpha'\alpha\ldots$ durch die drei angeschriebenen Paare entsprechender Elemente vollständig bestimmt, und da in ihnen ein Paar enthalten ist, so sind alle entsprechenden Elemente Paare, die Gebilde sind in Involution. Sind aber zwei sich selbst gepaarte Elemente λ, μ gegeben, und ist $\alpha\alpha'$ ein Paar der Involution, so ist $\lambda\mu\alpha\alpha' \overline{\wedge}\, \lambda\mu\alpha'\alpha$ und die Puncte $\alpha\alpha'$ sind von $\lambda\mu$ (siehe Seite 27) harmonisch getrennt. Folglich ist zu jedem Puncte α der entsprechende Punct α' in der Involution bestimmt, wenn zwei sich selbst entsprechende Elemente $\lambda\mu$ gegeben sind. Wir nennen sich selbst entsprechende Elemente Doppelelemente oder Ordnungselemente.

Besitzt eine Involution zwei Doppelelemente, so sind die Paare der Involution durch sie harmonisch getrennt.

Besitzt eine Involution doppelte Elemente, so sind die sie zusammensetzenden projectiven Gebilde ungleichstimmig, und umgekehrt, sind die eine Involution erzeugenden projectiven Gebilde ungleichstimmig, so hat die Involution zwei (reale) Doppelelemente. — Eine Involution mit zwei sich selbst entsprechenden Doppelelementen heisst eine hyperbolische Involution.

Sind in einer Involution die beiden Paare $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ nicht durch einander getrennt, so sind die erzeugenden projectiven Gebilde ungleichstimmig, es giebt Doppelelemente und es ist kein Paar durch ein anderes Paar getrennt. Ist daher ein Paar durch ein anderes Paar getrennt, so muss jedes Paar durch jedes andere Paar getrennt sein, und es giebt keine sich selbst entsprechenden, keine Doppelelemente. Die erzeugenden projectiven Gebilde sind gleichstimmig, die Involution heisst eine elliptische.

Man spricht auch von parabolischen oder uneigentlichen Involutionen. Eine parabolische Involution ist eine solche, in der jedes Element einem und demselben Elemente zugeordnet ist, die Eindeutigkeit der Zuordnung fällt fort. Die conjugirten Puncte auf einer Tangente, oder die conjugirten Strahlen durch einen Stützpunct bilden eine solche uneigentliche Involution. Man kann die uneigentliche Involution als eine Involution auffassen, in der die beiden Doppelelemente in eins zusammengefallen sind. Ein Element, das durch die beiden Doppelelemente von einem ausserhalb gegebenen harmonisch getrennt ist, also zwischen ihnen liegt, fällt mit den Doppelelementen zusammen, wenn diese selbst zusammenfallen, so dass jedem Elemente eben dieses Doppelelement, und umgekehrt das Doppelelement jedem Elemente des Gebildes entspricht.

Die für $K^{(2)}$ conjugirten Puncte einer Geraden, welche die Curve $K^{(2)}$ trifft, bilden eine hyperbolische Involution, die sich selbst entsprechenden Puncte sind die Schnittpuncte mit der Curve. Die Paare conjugirter Puncte auf einer Geraden, die $K^{(2)}$ nicht trifft, bilden eine elliptische Involution.

Die Paare conjugirter Linien durch einen Punct bilden eine hyperbolische Involution, wenn es von dem Puncte Tangenten an $K^{(2)}$ giebt, und diese sind die Doppelstrahlen der Involution. Giebt es keine Tangenten, so bilden die conjugirten Paare eine elliptische Involution.

Die Hyperbel wird von den uneigentlichen Geraden in zwei Puncten getroffen, die Paare conjugirter Puncte auf den uneigentlichen Geraden bilden eine Involution mit Doppelelementen,

daher der Name hyperbolische Involution. Die uneigentliche Gerade trifft die Ellipse nicht. Die conjugirten Puncte auf ihr bilden eine Involution ohne doppelte Elemente, daher der Name elliptische Involution. Die Parabel berührt die uneigentliche Gerade, die conjugirten Puncte auf ihr bilden eine uneigentliche Involution, daher der Name parabolische Involution.

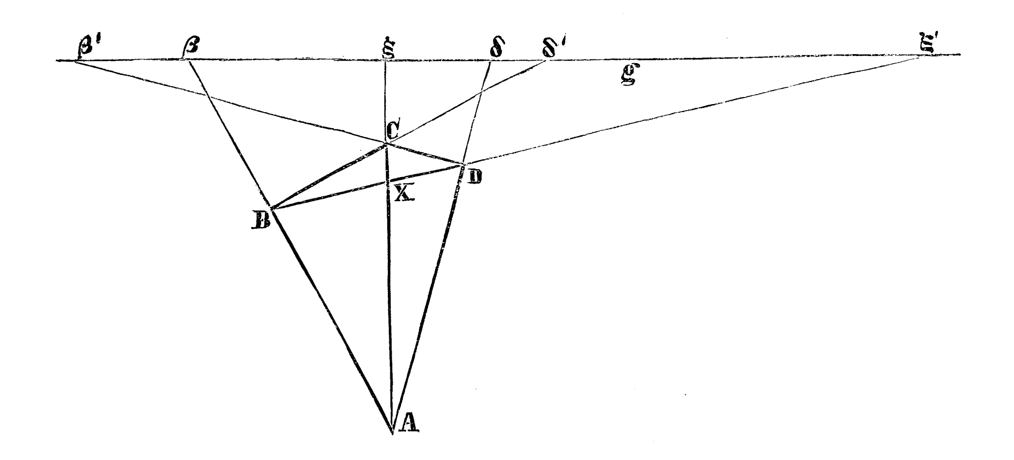
Der Pol der uneigentlichen oder unendlich fernen Geraden in Bezug auf die Curve $K^{(2)}$ heisst der Mittelpunct dieser Curve, und jede durch ihn gehende Gerade heisst Durchmesser. Der Mittelpunct liegt innerhalb der Curve bei der Ellipse, ausserhalb bei der Hyperbel und auf der Curve bei der Parabel. Der Mittelpunct der Parabel ist ein uneigentlicher Punct, aus diesem Grunde sagt man auch wohl — namentlich in der rechnenden Geometrie — die Parabel besitze keinen Mittelpunct. Paare conjugirter gerader Linien durch den Mittelpunct heissen conjugirte Durchmesser. Die Hyperbel besitzt Tangenten vom Mittelpunct, sie heissen Asymptoten. Jedes Paar conjugirter Durchmesser ist durch sie harmonisch getrennt. Die Paare conjugirter Durchmesser bilden eine hyperbolische Involution, die Asymptoten sind die Doppelstrahlen. Die Polare des Ellipsenmittelpunctes, die unendlich ferne Gerade, trifft die Ellipse nicht, es giebt keine Tangenten vom Mittelpuncte, die Paare conjugirter Durchmesser bilden deshalb eine elliptische Involution. — Ist ein Durchmesser Sehne, was bei der Ellipse stets der Fall ist, so liegt der Mittelpunct in der Mitte zwischen den beiden Schnittpuncten, weil er durch diese Puncte von dem uneigentlichen Puncte des Durchmessers harmonisch getrennt ist. Liegt ein Punct in der Mitte zweier Sehnen durch ihn, so ist er der Mittelpunct und liegt in der Mitte aller Sehnen durch ihn, denn durch die zwei Sehnen ist die uneigentliche Gerade als die Polare des Punctes bestimmt. Bei der Parabel sind alle Durchmesser einander parallel, sie bilden eine uneigentliche Involution, in der jeder Durchmesser der uneigentlichen Geraden zugeordnet ist. Wir fügen hier noch einige Sätze über Durchmesser an. — Eine Schaar paralleler Sehnen hat einen gemeinsamen uneigentlichen Punct, sie bilden einen linearen Büschel. Daher sind diese Sehnen alle dem Durchmesser conjugirt, der die Polare jenes uneigentlichen Punctes des Trägers des Parallelbüschels ist, denn dieser Durchmesser enthält den Pol jeder dieser Sehnen. Der Durchmesser bestimmt auf jeder ihm conjugirten Sehne die Mitte zwischen den Schnittpuncten der Sehne mit der Curve, weil er auf jeder Sehne den Punct bestimmt, der durch die Schnittpuncte vom uneigentlichen

Puncte der Sehne harmonisch getrennt ist. Umgekehrt, die Mitten einer Schaar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser, der dieser Schaar conjugirt ist. — Zwei conjugirte Durchmesser bilden mit der uneigentlichen Geraden ein Polardreieck, bei der Parabel ist das Dreieck ein uneigentliches, weil zwei Seiten zusammengefallen sind. — Die Nebenseiten (Diagonalen) eines einer Curve zweiter Ordnung umschriebenen Parallelogramms bilden ein Paar conjugirter Durchmesser, denn sie bilden mit der uneigentlichen Geraden zusammen ein Polardreiseit. —

Zwei Paare nicht getrennter Elemente $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ auf einem linearen oder einem krummen Träger sind von einem und nur einem Paare von Elementen desselben Trägers harmonisch getrennt. Denn diese Elemente $\lambda\mu$ sind die Doppelelemente der Involution $\lambda \,.\, \mu \,.\, \alpha\alpha' \,.\, \beta\beta' \ldots$, und die Involution ist durch zwei Paare $\alpha\alpha'\beta\beta'$ vollständig bestimmt.

Der elementarste Fall einer Involution von sechs Puncten ist der, in welchem die sechs Seiten eines Vierecks von einer Geraden g geschnitten werden. Geht die Gerade durch eine der Nebenecken, so ist der Schnittpunct ein Doppelpunct der Involution. Geht g durch eine Ecke, so ist die Involution eine uneigentliche.

Beweis. $ABCD$ sei das Viereck. Projicirt man die Puncte $BXD\xi'$ einmal von A aus und einmal von C aus auf g, so folgt

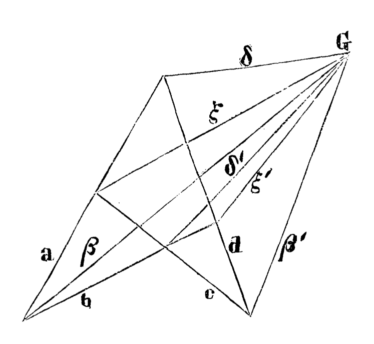


$\beta\xi\delta\xi' \barwedge \delta'\xi'\beta'\xi$ und nach Seite 27 $\barwedge \beta'\xi'\delta'\xi$. Da also die beiden Gebilde $\beta\xi\delta\xi'$ und $\beta\xi'\delta'\xi$ projectiv sind und ein Paar von Puncten besitzen, die sich gegenseitig entsprechen, nämlich ξ als Punct

des ersten Gebildes entspricht ξ' als Punct des zweiten, und ξ' als Punct des ersten entspricht ξ als Punct des zweiten, so ist dies mit allen Paaren entsprechender Puncte der Fall, und $\beta\beta' . \delta\delta' . \xi\xi'$ sind in Involution.

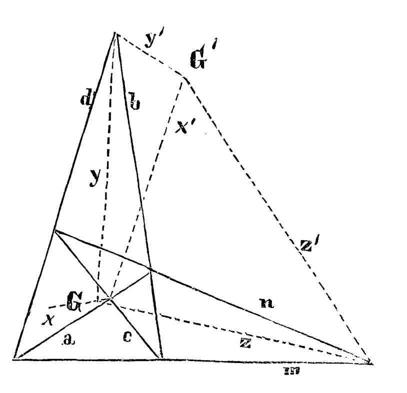
Projicirt man von einem Puncte A die Ecken eines Dreiecks BCD und die Schnittpuncte $\beta'\xi'\delta'$ einer Geraden g mit den BCD gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so erhält man sechs Strahlen in Involution $A(B\beta' . C\xi' . D\delta')$.

Projicirt man von einem Puncte G die sechs Ecken eines Vierseits $abcd$ durch sechs Strahlen $\beta\beta'\delta\delta'\xi\xi'$, so erhält man einen Strahlenbüschel in Involution. Liegt G auf einer Nebenseite, so ist diese ein Doppelstrahl, liegt G auf einer Seite, so ist die Involution eine uneigentliche. — Der Beweis dieses Satzes folgt nach dem Gesetze der Dualität aus dem Vorstehenden.



Auf jeder Geraden g, die die sechs Seiten eines Vierecks in einer Involution mit n i c h t getrennten Puncten trifft, giebt es ein und nur ein Paar von Puncten, die durch die drei Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks gleichzeitig harmonisch getrennt sind, die Doppelpuncte der Involution, die durch die sechs Schnittpuncte bestimmt sind.

Aus der Dualität folgt: Werden die sechs Ecken eines Vierseits von einem Puncte G aus durch eine Involution mit n i c h t getrennten Strahlenpaaren projicirt, so giebt es durch G zwei und nur zwei Strahlen, welche durch die drei Paare gegenüberliegender Ecken gleichzeitig harmonisch getrennt sind.



Legt man durch einen Punct G Strahlen xyz nach den Nebenecken (ac) (bd) (mn) eines Vierecks und bestimmt $x'y'$ so, dass $xax'c$, $ydy'b$ harmonische Büschel sind, und schneiden sich $x'y'$ in einem Puncte G', so sind auch $mznz'$ harmonische Strahlen, wenn z' die Neben-

ecke (mn) mit G' verbindet. Denn legt man durch GG' eine Gerade, so sind auf ihr die Schnittpuncte zweier Paare gegenüberliegender Seiten ab und cd harmonisch durch GG' getrennt, folglich auch die des dritten Seitenpaares mn. Dies lässt sich auch so aussprechen: Projicirt man die Nebenecken eines Vierecks von einem Puncte G durch drei Strahlen xyz und bestimmt in den Ecken drei Strahlen $x'y'z'$, welche bez. von den Seiten ac, bd, mn harmonisch getrennt sind, so gehen die drei Strahlen $x'y'z'$ durch einen Punct G'.

Das Gesetz der Dualität liefert weiter den Satz. Schneidet man die drei Nebenseiten eines Vierseits (mit den Ecken $ABCDMN$) durch eine Gerade g, welche dieselben in den Puncten XYZ trifft, und bestimmt man die drei Puncte $X'Y'Z'$, welche von ihnen bez. durch die Ecken AC, BD, MN auf den drei Diagonalen harmonisch getrennt sind, so liegen die drei Puncte $X'Y'Z'$ auch auf einer Geraden (g'). — Ein specieller Fall, der entsteht, wenn g die uneigentliche Gerade ist, ist der Satz von Gauss: Die Mitten der drei Nebenseiten eines Vierseits liegen auf einer Geraden.

Sind (Fig. 40, Taf. IX) die Puncte $AB \,.\, CX \,.\, DY$, $AB \,.\, CX_1 \,.\, DY_1$, $AB \,.\, CX_2 \,.\, DY_2 \,..$ in Involution, so ist $XX_1X_2 \,.. \barwedge YY_1Y_2 \,..$

Denn ersetzt man in dem Viereck $PQRS$ den Punct S durch einen andern S_1 auf der Seite RU, so bleiben auf der Geraden g von den sechs Puncten in Involution $AB \,.\, CX \,.\, DY$ die Puncte $ABCD$ fest, aber XY gehen in X_1Y_1 über. Die Puncte XY, $X_1Y_1 \,..$ werden durch die Strahlen $xx_1 \,..$, $yy_1 \,..$ bestimmt, die sich auf UR schneiden, also perspectiv sind, folglich ist $XX_1 \,.. \barwedge YY_1 \,..$ w. z. b. w. Dabei können die Puncte AB auch in einen Doppelpunct zusammenfallen, nämlich wenn g durch Q geht.

Satz von Hesse. *Zwei Paare conjugirter Puncte bestimmen ein drittes Paar.* — Sind AA', BB' zwei Paare conjugirter Puncte für eine Curve $K^{(2)}$ (Fig. 41, Taf. IX), die ein eigentliches Viereck bilden, und ist a die Polare von A, b die Polare von B, so geht a durch A', b durch B', S sei der Schnittpunct (ab). Die Gerade AB werde von a in X, von b in Y getroffen, dann sind AX, BY Paare der Involution für $K^{(2)}$ conjugirter Puncte auf AB. Diese Involution ist aber auch bestimmt durch die Schnittpuncte der Seitenpaare eines Vierecks mit der Transversale (AB). Es werde der Schnittpunct (AB') ($A'B$) mit T bezeichnet, so hat das Viereck $A'B'ST$ die Seitenpaare a, $B'TA$; $B'S(b)$, $A'TB'$; $A'B'$, ST. Da die ersten Seitenpaare die Gerade AB in Paaren der Involution in Bezug auf $K^{(2)}$ conjugirter Puncte treffen, und

diese durch zwei Punctpaare bestimmt ist, so treffen auch $A'B'$ und ST die Gerade AB in Puncten, die für $K^{(2)}$ conjugirte sind, oder C der Schnittpunct $(AB)(A'B')$ hat zu seinem conjugirten auf AB C' den Schnittpunct $(AB)(ST)$. S ist der Pol von AB, weil er der Schnittpunct der Polaren a, b von A und B ist, folglich muss ST die Polare des Punctes $(AB)(A'B')$ sein, sie geht durch T, den Schnittpunct $(AB')(A'B)$, folglich sind $(AB)(A'B')$ und $(AB')(A'B)$ conjugirte Puncte. — Fallen AB zusammen, so bestimmen $A'B'$ die Polare dieses Punctes, also alle Puncte die $A(B)$ conjugirt sind. Liegen $ABA'B'$ auf einer Geraden, so bestimmen sie eine Involution conjugirter Puncte, also unendlich viele Paare conjugirter Puncte.

Sind in einem Vierseit zwei Paare gegenüberliegender Ecken für eine Curve $K^{(2)}$ conjugiert, so bildet auch das dritte Paar gegenüberliegender Ecken ein Paar conjugirter Puncte, und dualistisch: Sind in einem Viereck zwei Paare gegenüberliegender Seiten conjugirte Paare, so ist auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten ein Paar conjugirter gerader Linien.

Die Mannigfaltigkeit der Curven zweiter Ordnung, für die zwei Paare von Puncten conjugirte sind, ist eine dreifach unendliche, und ist durch vier Individuen bestimmt. Man wird dadurch zu der Aufgabe geführt, die Paare von Puncten zu finden, die für vier Curven zweiter Ordnung gleichzeitig conjugirte Paare sind. Sind zwei Paare gefunden, so giebt der Hesse'sche Satz ein drittes Paar.

Hätte man (Fig. 41, Taf. IX) statt ab die Polaren $a'b'$ zum Beweise des Hesse'schen Satzes benutzt, die sich in S' schneiden, so würde sich $S'T$ als Polare von C ergeben haben, wie sich vorher ST als Polare von C ergab, also liegen STS' auf einer Geraden. Die Puncte $(aa')AA'$ bilden ein Polardreieck, ebenso $(bb')BB'$. Die Polaren von ABS' sind $(A'S)$, (SB'), $(A'B')$. Die Verbindungslinien der Ecken AB', BA', SS' gehen durch einen Punct. Daraus fliesst der wichtige Satz:

Ein Dreieck und das zugehörige Polardreieck liegen einander perspectiv.

Sind drei Paare von Puncten AA', BB', CC' auf den Geraden $s_a s_b s_c$ gegeben, und betrachtet man sie als Doppelpuncte von Involutionen auf $s_a s_b s_c$, und bestimmt man zu dem Schnittpuncte $(s_b s_c)$ sowohl auf s_b als auch auf s_c die Puncte, welche ihnen in den auf $s_b s_c$ liegenden Involutionen gepaart sind, und bezeichnet deren Verbindungslinie mit a, bestimmt man in analoger Weise zu $(s_c s^a)$ die Gerade b, zu $(s_a s_b)$ die Gerade c, so müssen die

Dreiecke $s_a s_b s_c$ und *abc* einander perspectiv liegen, wenn die Involutionen $s_a s_b s_c$ die Involutionen conjugirter Puncte für eine Curve $K^{(2)}$ sein sollen, für die *abc* die Polaren von $(s_b s_c)$ $(s_c s_a)$ $(s_a s_b)$ sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind die sechs Puncte $AA'BB'CC'$ Puncte von $K^{(2)}$. Dies ist, wie der Pascal'sche Satz, eine lineare Bedingung dafür, dass sechs Puncte auf einer Curve zweiter Ordnung liegen. Sie ist complicirter als die Pascal'sche Bedingung, ist aber unabhängig davon, ob die Involutionen $s_a s_b s_c$ Doppelpuncte haben oder nicht, lässt sich also auf den Fall anwenden, in welchem Paare von Puncten ideale sind (wir werden ideale Puncte sogleich definiren), während der Pascal'sche Satz ausser dem Falle realer Puncte nur noch dann anwendbar ist, wenn alle drei Paare ideal sind.

In der analystischen, überhaupt in der rechnenden Geometrie spricht man von imaginären Schnittpuncten einer Geraden mit einer Curve zweiter Ordnung, wenn die Gerade die Curve nicht trifft. Ist die Gleichung, die die Curve analystisch definirt, reell, so treten solche Puncte immer paarweise auf. Einzelne imaginäre Puncte treten nur dann auf, wenn die Curvengleichung imaginär ist, und es können solche Curven nur einzelne reelle Puncte besitzen, wenigstens wenn sie irreduktibel sind, d. h. wenn sie sich nicht in Curven niederer Ordnung zerlegen lassen. Hat die Gleichung die Form $f_1 + if_2 = o$, so kann man sie als Zweig der Curve $(f_1 + if_2) . (f_1 - if_2) = f^2{}_1 + f^2{}_2 = o$ ansehen, die eine reelle Gleichung besitzt. Verzichtet man in der reinen Geometrie auf das Vorkommen einzelner imaginärer Elementargebilde, begnügt man sich damit, solche Fragen zu behandeln, in denen imaginäre Elemente conjugirt auftreten, so beschränkt man im Grunde damit die Allgemeinheit nicht, nur wird die Behandlung z. B. einer Curve zweiter Ordnung (mit imaginärer Gleichung) unter die der Curven vierter Ordnung fallen, von der die Curve ein Zweig ist. Eine reale Gerade, die einen imaginären Punct enthält, und nicht zugleich den conjugirten, existirt nicht, gelingt es aber eine ideale Gerade zu definiren, die diesen Punct enthält, so wird man es nicht als einen Nachtheil anzusehen haben, wenn die Definition zugleich eine andere ideale Gerade mit liefert, die den conjugirt imaginären Punct enthält. Diese vorläufigen allgemeinen Bemerkungen können natürlich nicht volle Klarheit darüber bringen, was die Einführung imaginärer Elemente in die reine Geometrie besagen will. Diese Klarheit wird, wie es der synthetischen Methode entspricht, successive gewonnen, wenn man die einfachen und dann die verwickelteren Anwendungen der

neuen Begriffe kennen gelernt hat. Die Begriffsbestimmung conjugirt imaginärer Elemente gelingt durch die Vermittelung der Involution.

Besitzt eine Involution Doppelelemente, so sind diese durch zwei Paare der Involution völlig bestimmt. Besitzt die Involution keine Doppelelemente, so adjungiren wir ihr zwei ideale Elemente, die wir aggregirte nennen, weil das Wort conjugirt in der projectiven Geometrie schon seine Bedeutung hat, und zu Verwechselungen führen könnte. Ob wir also sagen, wir haben auf einem Gebilde erster oder zweiter Ordnung (auf einer Geraden oder in einem Puncte als Träger eines linearen Büschels, oder auf einer Curve zweiter Ordnung oder in einem Büschel zweiter Ordnung) eine elliptische Involution, oder wir haben auf ihr ein Paar idealer Elemente (aggregirt idealer Elemente), das soll in Zukunft gleich sein, jede dieser Redeweisen fordert, dass von einer Involution zwei Paare gegeben seien.

Nach Einführung dieser Redeweise können wir sagen, dass jede Gerade eine Curve zweiter Ordnung in zwei Puncten trifft, die in einen zusammenfallen, wenn die Gerade Tangente ist. Auf jeder Geraden bestimmen die Paare conjugirter Puncte eine Involution, die Doppelpuncte sind die Puncte der Curve. Ist die Involution eine hyperbolische, so sind die sich selbst conjugirten Puncte real, ist sie elliptisch, so sind die Doppelpuncte ideal. Nur für den Fall dass die Gerade Tangente ist, sind die beiden Schnittpuncte in einen zusammengefallen, die Involution conjugirter Puncte ist parabolisch. Man sagt auch wohl von der Tangente, dass sie zwei zusammenfallende Puncte mit der Curve gemein habe, um das zweifache Schneiden unter allen Umständen aufrecht zu erhalten.

Sind die Paare einer Involution conjugirte Paare für eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so sagen wir, die Involution gehöre zu $K^{(2)}$. Das Wort „aggregirt“ bei einem Paare idealer Elemente lassen wir fort, wenn durch das Wort „Paar“ die Zusammengehörigkeit hinlänglich charakterisirt ist.

Aufgabe. Eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, die durch ein Paar idealer Puncte geht, oder was dasselbe ist, für die eine auf einer Geraden g gegebene Involution eine zugehörige ist.

Man projicire von einem Puncte U aus (Fig. 42, Taf. X) die Puncte $\xi\eta\zeta$.. der auf g liegenden Puncte der Involution und von V aus die entsprechenden Puncte $\xi'\eta'\zeta'$ dieser Involution. Dann bestimmen die entsprechenden Strahlen der projectiven Büschel

$U(\xi\eta\zeta\ldots\xi'\eta'\ldots) \overline{\wedge} V(\xi'\eta'\zeta'\ldots\xi\eta\ldots)$ eine der Forderung entsprechende Curve $K^{(2)}$. — Es mögen sich $(U\xi)$, $(V\xi')$ in X schneiden, $(U\xi')$, $(V\xi)$ in X'. So schneiden sich (UV), (XX') im Pol G der Geraden g, denn durch ihn geht nach den Sätzen vom eingeschriebenen Viereck die Polare von ξ und die Polare von ξ', $G\xi\xi'$ bilden ein Polardreieck, also sind $\xi\xi'$ für $K^{(2)}$ conjugirte Puncte. Diese Construktion ist unabhängig davon, ob die Involution auf g hyperbolisch, oder wie in der Zeichnung elliptisch ist. Sie liefert aber nicht die allgemeinste Curve $K^{(2)}$ zu der die Involution auf g eine zugehörige ist, denn durch die beiden weiteren Puncte UV ist die Curve, die unsere Construktion liefert, völlig bestimmt, also durch vier Puncte, wenn anders die Involution einem Punctpaare aequivalent ist. Die gegebene Construktion ist gleichwohl wichtig, sie hat die Besonderheit, dass die Gerade g und die Verbindungslinie h der willkürlich gewählten Puncte UV ein Paar conjugirter gerader Linien für die erzeugte Curve $K^{(2)}$ sind. — Trifft $h(UV)$ die Gerade g in I, und ist H der I in der auf g gegebenen Involution gepaarte Punct, so sind UI, VH ein entsprechendes Strahlenpaar der $K^{(2)}$ erzeugenden Büschel, sie schneiden sich in V, ebenso sind UH, VI ein entsprechendes Paar der erzeugenden Büschel, sie schneiden sich in U. Auf der Geraden UH liegt nur der Curvenpunct U, auf VH liegt nur der Curvenpunct V, diese Geraden sind Tangenten der Curve, ihr Schnittpunct H ist folglich der Pol von h, hg sind conjugirt. — Der Satz lässt sich umkehren. — Projicirt man von zwei Puncten UV einer Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ die Puncte dieser Curve auf eine der Verbindungslinie h der Puncte UV conjugirte Gerade g, so treffen die entsprechenden Projectionsstrahlen die Gerade g in conjugirten Puncten. Denn die Puncte $\xi\eta\zeta\ldots$, die der Büschel in U auf g bestimmt, sind projectiv den Puncten $\xi'\eta'\zeta'\ldots$, die der Büschel in V auf g bestimmt. Fällt X auf V, so fällt ξ auf den Punct I, in dem sich hg schneiden, ξ' aber auf den Schnittpunct der Tangente in V mit g, also auf den Pol H von h, weil g als h conjugirte Gerade einerseits, andrerseits die Tangente in V diesen Pol H enthält. Fällt X auf U, so fällt ξ auf H und ξ' auf I. H und I bilden ein Paar, also ist $\xi\xi'.\eta\eta'\ldots HI\ldots$ eine Involution. $U\xi'$ und $V\xi$ schneiden sich in einem Puncte Y auf $K^{(2)}$ und $G\xi\xi'$ bilden ein Polardreieck, so dass $\xi\xi'$ conjugirt sind. w. z. b. w.

Ist g die uneigentliche Gerade, so folgt hieraus der Satz: Verbindet man die Puncte einer Curve $K^{(2)}$, die auf einem Durchmesser liegen, mit einem Puncte der Curve, so sind die Ver-

bindungslinien einem Paare conjugirter Durchmesser parallel, gehen durch ein Paar conjugirter Puncte auf der uneigentlichen Geraden. Damit löst man die Aufgabe, eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, deren Durchmesser eine gegebene Involution bilden. Man nimmt einen Punct U willkürlich an und bestimmt einen Punct V so, dass das Centrum G der gegebenen Involution die Mitte zwischen UV ist. Von UV zieht man gerade Linien den Paaren der Involution parallel, die Paare schneiden sich auf der gesuchten Curve. — Verallgemeinert löst diese Construktion die Aufgabe: Es ist ein Punct und eine Gerade gegeben, die für eine Curve $K^{(2)}$ Pol und Polare sein sollen, und auf der Geraden ist eine Involution gegeben, die zu $K^{(2)}$ zugehörig sein soll, man soll $K^{(2)}$ zeichnen. Mit den conjugirten Puncten auf der Geraden sind zugleich die conjugirten Geraden durch deren Pol gegeben. Diese Aufgabe ist identisch mit der Aufgabe: Eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn zwei reale oder ein Paar idealer Tangenten gegeben sind, und die Berührungspuncte, d. h. wenn noch die Involution conjugirter Puncte auf der Polare des Schnittpunctes der Tangenten gegeben ist. Ist die Involution conjugirter Geraden eine elliptische, so sind die idealen Doppelstrahlen derselben die idealen Tangenten vom Träger der Involution an die Curve.

Nun lösen wir die Aufgabe: Eine Curve $K^{(2)}$ durch drei Puncte SAB zu construiren, zu der eine Punctinvolution auf einer Geraden g eine zugehörige ist, die also noch durch ein Paar realer oder idealer Puncte hindurch geht. — Auf g (Fig. 43, Taf. X) bestimme die Gerade SA den Punct α, dem α' auf g gepaart sein mag. SB bestimme auf g β, welchem Puncte β' gepaart ist. $(A\alpha')(B\beta')$ bestimmen den Punct S'. Projicirt man von S und S' aus die Involutionen durch die Büschel $S(\alpha\alpha'.\beta\beta'\ldots)$ $\overline{\wedge}\, S'(\alpha'\alpha.\beta'\beta\ldots)$, so bestimmen die entsprechenden Strahlen die gesuchte Curve. — Es giebt nur eine Curve zweiter Ordnung, die die Aufgabe löst. Denn die Polare von α geht durch α' und den Punct auf SA, der von α durch S und A harmonisch getrennt ist. Auf der Geraden αB ist der Punct B', der von B durch α und die Polare von α harmonisch getrennt ist, ein Punct der Curve. Analog ist ein Punct A', der von A durch β und die Polare von β harmonisch getrennt ist, ein Punct der Curve. Durch die fünf Puncte $SABA'B'$ ist aber die Curve $K^{(2)}$ eindeutig bestimmt; man kann diese Methode als eine neue Art der Lösung unserer Aufgabe ansehen.

Dieser Aufgabe steht dualistisch die Aufgabe gegenüber:

Eine Curve zweiter Ordnung als Stützcurve eines Büschels zu construiren für den eine gegebene Strahleninvolution eine zugehörige ist. Man nehme zwei gerade Linien u v willkürlich an. Die Strahlen $\xi\eta\zeta$.. der gegebenen Involution treffen u in einer Punctreihe, die $\xi\eta\zeta$.. in der Involution gepaarten Strahlen $\xi'\eta'\zeta'$.. treffen v in einer Punctreihe, die der auf u projectiv ist. Die Verbindungslinien xyz.. entsprechender Puncte auf uv bilden den gesuchten Büschel, sind die Tangenten der gesuchten Curve, deren Puncte als Stützpuncte in bekannter Weise zu finden sind. Die erhaltene Curve und der zugehörige Büschel giebt nicht die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe, sie giebt die Curve, für welche H, der Schnittpunct (uv), und das Involutionscentrum G conjugirte Puncte sind. Will man eine Curve haben, die drei gegebene Geraden abs zu Tangenten hat und die Involution G als zugehörige besitzt, so bestimme man den Strahl α der Involution G, der durch (sa) geht, und bestimme den ihm gepaarten Strahl α' derselben. Ferner sei β der Strahl der Involution G, der durch (sb) geht, und β' der ihm gepaarte. Die Schnittpuncte $(a\alpha')$ $(b\beta')$ bestimmen eine Gerade s'. Construirt man nun mit den Strahlen ss' den Büschel und seine Stützcurve wie in der vorigen Aufgabe, so erhält man die gesuchte Curve. Ist die Involution elliptisch, so hat man eine Curve zweiter Ordnung gezeichnet aus drei realen und einem Paare von idealen Tangenten.

Durch drei Puncte ABC und ein Paar Pol und Polare ist eine Curve zweiter Ordnung bestimmt. Denn werden die Puncte $A'B'$ so bestimmt, dass $PApA'$, $PBpB'$ harmonische Würfe sind, so muss die Curve die fünf Puncte $ABCA'B'$ enthalten und ist durch sie bestimmt. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn ABP auf einer Geraden liegen, und $ApBP$ nicht harmonisch sind. Sind sie aber harmonisch, so ist die Curve nicht völlig durch die Data bestimmt.

Durch drei Tangenten abc und ein Paar Pol und Polare Pp ist eine Curve zweiter Ordnung ebenfalls bestimmt, wenn nicht p durch den Schnittpunct zweier der gegebenen Geraden etwa (ab) geht.

Durch drei Puncte oder Tangenten und den Mittelpunct, den Pol der uneigentlichen Geraden, ist eine Curve zweiter Ordnung bestimmt, wenn nicht zwei der Puncte auf einem Durchmesser liegen, oder zwei der Tangenten einander parallel sind.

Aufgabe. Eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, wenn ein realer Punct A, ein Paar idealer Puncte BC d. h. eine zur Curve gehörige Involution auf einer Geraden g und ein Paar

Pol und Polare Pp gegeben sind. — Die Gerade p treffe g in H, welchem Puncte H' in der Involution gepaart sein soll, so ist die Gerade h gleich $(H'P)$ die Polare von H. Wir haben also zweimal Pol und Polare Pp, Hh. Nun bestimmen wir die Puncte DE so, dass $APDp$, $AHEh$ harmonische Gebilde sind. Die Puncte DE sind zwei weitere reale Puncte der Curve, was schon genügt. Zwei weitere Puncte $D'E'$ aber kann man noch dadurch erhalten, dass man $DHD'h$, $EPE'p$ harmonisch macht. Dabei dürfen die Puncte APH nicht auf einer Geraden liegen.

Die dualistische Aufgabe, in der ein Strahl a, eine Strahleninvolution G, und ein Paar Pol und Polare gegeben sind, wird analog gelöst.

Wir geben hier einem Satze Raum, der für die projective Massbestimmung von Winkeln von Wichtigkeit ist.

Es sei (Fig. 44, Taf. X) p die Polare von P für $K^{(2)}$ und P liege innerhalb. Die Geradenpaare $(PA)(PA')$, $(PB)(PB')$ seien conjugirte, und es seien die Puncte AB durch $A'B'$ auf $K^{(2)}$ nicht getrennt, so schneiden sich die Geraden $(AB)(A'B')$ auf p. — Beweis: C sei der Schnittpunct von (AB) mit p. Wir ziehen die Gerade $c\,(PC)$ und den dieser conjugirten Strahl $x\,(PX)$. Dann bilden $P(BXAC)$ einen harmonischen Büschel, weil die Polare von C durch den Punct X geht, der von C durch AB harmonisch getrennt ist. Da nun conjugirte gerade Linien durch einen Punct in Involution sind, so ist $BXAC \;\overline{\wedge}\; B'CA'X$, und es ist auch $P(B'CA'X)$ ein harmonischer Büschel. Verbindet man C mit A', so ist c von x durch $A'Y$ harmonisch getrennt, wenn Y der zweite Schnittpunct von (CA') mit der Curve ist, aber es ist c von x auch durch $A'Y'$ harmonisch getrennt, wenn Y' der Schnitt von (PB') mit (CA') ist. YY' müssen demnach im Puncte B' zusammenfallen, w. z. b. w. — Ist P der Mittelpunct, p die uneigentliche Gerade, $K^{(2)}$ eine Ellipse, so hat man den Satz: Sind AA', BB' die Endpuncte zweier Paare conjugirter Halbmesser einer Ellipse, und sind die Halbmesser so gezogen, dass AB durch $A'B'$ nicht getrennt ist, so sind die Geraden (AB), $(A'B')$ einander parallel.

Das gemeinsame Paar zweier Involutionen auf demselben Träger ist sicher real, wenn wenigstens eine der beiden Involutionen eine elliptische ist. Sind beide hyperbolisch, so giebt es ein reales gemeinsames Paar, wenn die Doppelelemente der beiden Involutionen nicht durch einander getrennt sind, im andern Falle ist das gemeinsame Paar ideal. — Man kann die beiden Involutionen immer eineindeutig auf Involutionen beziehen,

die auf einer Curve zweiter Ordnung liegen. Es genügt daher, die ausgesprochenen Sätze für den Fall zu erweisen, dass der Träger der beiden Involutionen eine Curve zweiter Ordnung ist.

Sind die Perspectivitätsachsen, oder wie wir auch sagen, Involutionsachsen der beiden auf $K^{(2)}$ liegenden Involutionen I_1 I_2 die Geraden $g_1 g_2$, die Perspectivitäts- oder Involutionscentren $G_1 G_2$, so dass $G_1 g_1$, $G_2 g_2$ Pol und Polare sind, so liefert jede Gerade durch G_1 ein Paar von I_1 auf $K^{(2)}$, jede Gerade durch G_2 ein Paar von I_2 auf $K^{(2)}$, die Gerade $(G_1 G_2)$ liefert das gemeinsame Paar. Es ist real, wenn $(G_1 G_2)$ die Curve trifft, ideal, wenn die Gerade die Curve nicht trifft. Ist nun eine der beiden Involutionen $I_1 I_2$ elliptisch, so schneidet die betreffende Involutionsachse, die ja die Doppelelemente auf $K^{(2)}$ bestimmt, die Curve nicht, ein Involutionscentrum liegt innerhalb, die Gerade $(G_1 G_2)$ trifft $K^{(2)}$ nothwendig in realen Puncten. Treffen $g_1 g_2$ die Curve in nicht getrennten Puncten, so schneiden sie sich in einem Puncte H ausserhalb. Die Polare h von H geht durch $G_1 G_2$ und trifft $K^{(2)}$ nothwendig in realen Puncten. Treffen $g_1 g_2$ die Curve $K^{(2)}$ in getrennten Puncten, so dass die Doppelelemente von $I_1 I_2$ durch einander getrennt sind, so liegt H innerhalb, h ausserhalb, das gemeinsame Paar ist ideal. Dasselbe wird durch eine elliptische Involution bestimmt, deren ideale Doppelelemente das gemeinsame Paar der beiden Involutionen $I_1 I_2$ sind. — Um einen Namen zu haben, wollen wir die Involution, deren reale oder ideale Doppelelemente das gemeinsame Paar zweier Involutionen sind, die jenen adjungirte Involution nennen. Es wird also die $I_1 I_2$ adjungirte Involution I anzugeben sein. Es sei (Fig. 45, Taf. X) G_1 das Involutionscentrum von $AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1 \,..$, G_2 das Involutionscentrum von $AA_2 \,.\, BB_2 \,.\, CC_2 \,..$ Zu X mögen die Puncte $X_1 X_2$ als gepaarte Elemente, zu Y mögen $Y_1 Y_2$ als gepaarte Elemente der Involutionen $I_1 I_2$ gehören. Dann werde XY so gewählt, dass $XY \,.\, X_1 Y_1 \,.\, X_2 Y_2$. in Involution sind, so bilden alle möglichen Punctpaare XY eine Involution und zwar die $I_1 I_2$ adjungirte Involution I. Diese Involution erhält man in folgender Weise:

G sei der Pol der Geraden $g\,(G_1 G_2)$ in Bezug auf den Träger $K^{(2)}$ der Involutionen $I_1 I_2$. $G_1 X$ treffe $K^{(2)}$ in X_1, $G_2 X$ treffe $K^{(2)}$ in X_2, GX_1 treffe $K^{(2)}$ in Y_1, GX_2 treffe $K^{(2)}$ in Y_2, $(G_1 Y_1)(G_2 Y_2)$ schneiden sich in Y. Trifft nun $G_1 Y_1$ die Curve $K^{(2)}$ in Y' und trifft $G_2 Y_2$ die Curve in Y'', so geht die Polare von G_1 durch den Punct $(X_1 Y_1)(XY')$, sie geht aber auch durch den Punct G auf $X_1 Y_1$, woraus folgt, dass (XY') durch G gehen muss, weil $X_1 Y_1$ nicht die

Polare von G_1 ist. Aus gleichen Gründen muss GX durch den Punct Y'' gehen, $Y'Y''$ müssen zusammenfallen, und zwar in den Punct Y, in dem sich $(G_1Y_1)(G_2Y_2)$ schneiden. Demnach schneiden sich $(G_1Y_1)(G_2Y_2)$ auf $K^{(2)}$ in einem Puncte Y, durch den auch GX geht. Die Puncte $XY . X_1Y_1 . X_2Y_2$ sind in Involution mit dem Involutionscentrum G, und die Herstellung dieser Involution ist linear. Alle möglichen durch G bestimmten Punctpaare XY (zu denen auch X_1Y_1, X_2Y_2 gehören) bilden die I_1I_2 adjungirte Involution I. Das gemeinsame Paar der Involutionen I_1I_2 sind die Schnittpuncte von g mit $K^{(2)}$, die Berührungspuncte der Tangenten von G an die Curve. Die Doppelpuncte der Involution I sind genau dieselben Puncte, ideale wenn g die Curve nicht trifft. — Die beiden Dreiecke XX_1X_2, YY_1Y_2 liegen perspectiv, also schneiden sich $(XX_1)(YY_1)$, $(XX_2)(YY_2)$, $(X_1X_2)(Y_1Y_2)$ in drei Puncten G_1G_2F einer Geraden, der Geraden g.

Liegen auf zwei Geraden $s's''$ Involutionen, die einer Curve $K^{(2)}$ zugehörige sind, und projicirt man von einem Puncte S der Curve diese Involutionen auf die Polare p des Punctes $P(s's'')$ und construirt zu den beiden hierdurch auf p erhaltenen Involutionen die adjungirte, wir wollen sie als Involution p bezeichnen, so ist diese letztere von der Lage des Punctes S auf $K^{(2)}$ unabhängig, sie ist die auf p zu $K^{(2)}$ gehörige Involution.

Projicirt man von S die Involution s' nach $AA' . BB'..$ auf $K^{(2)}$, so schneiden sich (AA'), $(BB')..$ in einem Puncte S' auf p, dem Pole der Geraden s'. Denn wir haben (auf Seite 80) gesehen, dass man ein Paar conjugirter Puncte erhält, wenn man von den Schnittpuncten einer Geraden einen Curvenpunct auf eine dieser Geraden conjugirte Gerade projicirt. Legt man also durch S' eine beliebige Gerade, die $K^{(2)}$ schneidet, projicirt von den Schnittpuncten den Punct S auf s', so erhält man ein Paar conjugirter Puncte, und umgekehrt die Projectionen conjugirter Puncte von s' auf $K^{(2)}$ sind Puncte, deren Verbindungslinien durch S' gehen. — Projicirt man von S aus die Involution s'' nach den Puncten $AA'' . BB''..$ auf $K^{(2)}$, so erhält man eine Involution, deren Centrum der Pol S'' von s'' ist, und also auf p liegt. Die realen oder idealen Schnittpuncte MN von p und $K^{(2)}$ sind das gemeinsame Paar der Involutionen $AA' . BB'..$, $AA'' . BB''..$ Die Involution der Paare AB, die den beiden Involutionen auf $K^{(2)}$ adjungirt ist, hat MN zu realen oder idealen Doppelelementen, ihr Involutionscentrum ist P. Projicirt man von S aus die Involutionen $AA' . BB' . CC'..$, $AA'' . BB'' . CC''..$ und die adjungirte AB auf die Gerade p, so ist offenbar die Projection der letzten

Involution die adjungirte zu den Projectionen der beiden ersten, und da die adjungirte Involution die Puncte MN zu Doppelelementen hat, so ist sie die Involution der conjugirten Puncte auf p und von der Lage des Punctes S auf $K^{(2)}$ unabhängig, w. z. b. w. Hieraus leitet Herr Böge (Hamburger Nachrichten Nr. 6 1886) eine Construktion einer Curve zweiter Ordnung ab aus einem Puncte S und aus zwei Paaren idealer Puncte, die auch für den Fall ungeändert gültig bleibt, dass das eine, oder dass beide dieser Punctpaare reale sind.

Die Polare p von $P(s's'')$ ist die Verbindungslinie der in den Involutionen $s's''$ dem Puncte P gepaarten Puncte. Die Involution für die Curve conjugirter Puncte auf p wird dadurch gefunden, dass man $s's''$ von S auf p projicirt, und zu den so auf p sich ergebenden Involutionen die adjungirte sucht. T sei der Punct auf SP der von S durch P und p harmonisch getrennt ist. ST und p sind conjugirte gerade Linien. Projicirt man demnach (siehe Seite 80) die Involution conjugirter Puncte auf p von S und T aus, so erzeugen die Schnittpuncte der Strahlen, welche die Paare projiciren, die gesuchte Curve. Die Construction selbst lässt erkennen, dass es nur eine der Forderung genügende Curve giebt. Später ergeben sich andere Constructionsweisen, die eben gegebene ist doch recht complicirt.

Die dualistische Aufgabe, eine Curve zweiter Ordnung zu construiren, wenn eine Tangente und zwei Strahleninvolutionen als zugehörige gegeben sind, ist eben nach den Regeln der dualistischen Uebertragung unschwer zu lösen.

Eine reale Gerade, die einen idealen Punct enthält, muss nothwendig den aggregirten idealen Punct auch enthalten, denn ginge durch diesen Punct ausser dem Träger der elliptischen Involution noch eine zweite reale Gerade, so würden sich die beiden realen Geraden in ihm schneiden, ein Schnittpunct zweier realer Geraden ist aber immer real. — Ein linearer Büschel, der eine ideale Gerade enthält, enthält auch die aggregirte. Ein realer Punct lässt sich demnach nicht mit einem idealen durch eine reale Gerade verbinden, wenn nicht der reale Punct auf der Geraden liegt, die neben dem idealen Puncte auch den aggregirten enthält. Wohl aber kann man eine Strahleninvolution mit realem Träger angeben, von deren idealen Doppelstrahlen einer durch einen idealen Punct und der andere durch den aggregirten geht. Der Büschel durch den realen Punct, welcher die die idealen Puncte definirende Involution projicirt, genügt unmittelbar unserer Forderung. Zwei ideale nicht aggregirte Puncte lassen

sich durch eine ideale Gerade verbinden, von der sich ein realer Punct finden lässt. Die Forderung, diesen Punct zu zeichnen, fällt mit der Aufgabe zusammen:

Zwei gerade Punctreihen g, $\mathfrak{g}$ in Involution von einem Puncte aus so zu projiciren, dass jedes Paar von Geraden durch ein Paar der einen Involution zugleich durch ein Paar der andern Involution geht. — Auf g (Fig. 46, Taf. X) liege die Involution $AA' . BB' \ldots$, auf $\mathfrak{g}$ die Involution $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' . \mathfrak{B}\mathfrak{B}' \ldots$, $A\mathfrak{A}$ sei der Schnittpunct von g und $\mathfrak{g}$. Projicirt man von B und B' aus die Puncte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}' \ldots$, so erzeugen die Büschel $B(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}' \ldots) \barwedge B'(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{B} \ldots)$ eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, diese trifft die dem Puncte $A\mathfrak{A}$ gepaarten Puncte $A'\mathfrak{A}'$ verbindende Gerade in Puncten PQ, welche die Aufgabe lösen, denn von P aus werden zwei Paare $AA' . BB'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' . \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ durch dieselben Strahlen projicirt, folglich alle Paare. Zur Curve $K^{(2)}$ gehören die Puncte BB', für die ein willkürliches Paar gewählt werden kann, so dass man sich einer Reihe von Curven $K^{(2)}$ zur Auffindung der Puncte PQ bedienen kann, die Puncte PQ aber sind davon offenbar unabhängig. Haben die Involutionen auf g und $\mathfrak{g}$ reale Doppelpuncte MN bez. $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, so ist der Schnittpunct $(M\mathfrak{M})(N\mathfrak{N})$ der eine, der Schnittpunct $(M\mathfrak{N})(N\mathfrak{M})$ der andere der gesuchten Puncte, sie sind real. Hat die eine Involution reale Doppelpuncte MN, die andre nicht, so giebt es keine realen Puncte PQ, die die Aufgabe lösen. Denn die reale Gerade PM müsste durch einen Doppelpunct der Involution auf $\mathfrak{g}$ gehen, und da dieser ideal ist, auch den zweiten enthalten, sie müsste mit $\mathfrak{g}$ zusammenfallen, P müsste auf $\mathfrak{g}$ liegen, was offenbar unmöglich ist. Die Involution conjugirter Puncte, die $K^{(2)}$ auf $(A'\mathfrak{A}')$ bestimmt, giebt durch ihre Doppelpuncte die idealen Puncte PQ, die die Aufgabe lösen. Sind sowohl M und N als auch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ideal, so sind die Puncte P und Q real. Die Geraden $B'(\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots)$ mögen $(A'\mathfrak{A}')$ in $\beta\gamma \ldots$ treffen, und $\beta\gamma \ldots$ mögen von B nach $\mathfrak{B}''\mathfrak{C}'' \ldots$ auf $\mathfrak{g}$ projicirt werden. Dann ist $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \ldots$ mit $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}' \ldots$ gleichstimmig, mit $\mathfrak{B}''\mathfrak{C}''\mathfrak{D}'' \ldots$ ungleichstimmig, und die Projectivität $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}' \ldots \barwedge \mathfrak{B}''\mathfrak{C}''\mathfrak{D}'' \ldots$ besitzt reale Doppelpuncte. Verbindet man sie mit B, so schneiden die Verbindungslinien die Gerade $(A'\mathfrak{A}')$ in den fraglichen Puncten PQ.

Alle Paare AA', $BB' \ldots$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}' \ldots$ sind conjugirte Puncte für alle Curven zweiter Ordnung, für die die Involutionen auf g und $\mathfrak{g}$ zugehörige sind. Projicirt man von P aus gleichzeitig die Paare BB' und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, so ist der Punct Π, in dem sich $(B\mathfrak{P}')(B'\mathfrak{P})$ schneiden, nach dem Satze von Hesse (Seite 76) dem

Puncte P ebenfalls für alle diese Kegelschnitte conjugirt. Variirt man BB', so erhält man eine Reihe von Puncten Π, die (wie immer die conjugirten eines Punctes) auf einer Geraden p liegen, die von P durch $g\mathfrak{g}$ harmonisch getrennt ist. Der Punct P hat also für unsere Curvenreihe ein und dieselbe Polare p. Ebenso hat Q für alle diese Curven ein und dieselbe Polare q, für sie ist auch $(g\mathfrak{g})$ und $(A'\mathfrak{A}')$ Pol und Polare. — Projicirt man von den Puncten des Paares SS' auf g die Paare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' . \mathfrak{B}\mathfrak{B}' . .$ bez. $\mathfrak{A}'\mathfrak{A} . \mathfrak{B}'\mathfrak{B} . .$ und treffen die Geraden $S(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}' . .)$ die Gerade $(A'\mathfrak{A}')$ in $A'\mathfrak{A}'\beta\beta' . .$, und treffen die Geraden $S'(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{B} . .)$ die Gerade $(A'\mathfrak{A}')$ in $\mathfrak{A}'A'\beta_1\beta_1' . .$, so ist $A'\mathfrak{A}'\beta\beta' . . \overline{\wedge}\, \mathfrak{A}'A'\beta_1\beta_1' . .$ und da $A'\mathfrak{A}'$ ein Paar bilden, so sind diese projectiven Reihen in Involution $A'\mathfrak{A}' . \beta\beta_1 . \beta'\beta'_1 \ldots$ Die Doppelpuncte dieser Involution sind die Puncte P und Q, von denen die Involutionen auf g und $\mathfrak{g}$ gleichzeitig projicirt werden, das Paar $A'\mathfrak{A}'$ derselben ist durch P und Q harmonisch getrennt. Demnach ist P von Q durch g und $\mathfrak{g}$ harmonisch getrennt, Q liegt auf der Polare p von P, P auf der Polare q von Q, die Puncte $(g\mathfrak{g})PQ$ bilden ein Polardreieck und PQ sind conjugirte Puncte für alle Curven zweiter Ordnung, die durch die realen oder idealen Doppelelemente der auf g und $\mathfrak{g}$ gegebenen Involutionen hindurch gehen.

Haben zwei Involutionen, deren Träger die Puncte G und $\mathfrak{G}$ sind, ideale Doppelstrahlen, so schneidet sich ein Doppelstrahl der einen Involution mit einem Doppelstrahl der andern in einem idealen Puncte, die beiden andern schneiden sich in einem zweiten. Die Schnittpuncte (die einander aggregirt sind) liegen in einer realen Geraden. Da man doppelt paaren kann, so erhält man zwei Gerade pq, die die vier Schnittpuncte enthalten. Diese Sätze und die zu ihnen gehörigen Aufgaben stehen den eben behandelten dualistisch gegenüber, und kann daher ihre Untersuchung dem Leser überlassen werden.

Der Pascal'sche Satz für sechs ideale Ecken. Sind auf drei Geraden (Fig. 47, Taf. XI) drei Punctinvolutionen s_a, s_b, s_c gegeben mit idealen Doppelpuncten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, so kann man auf vier Arten aus ihnen ein ideales Sechsecksechsseit von der Art bilden, dass jede Seite durch zwei ideale nicht aggregirte Puncte geht, die gegenüberliegenden Seiten aber die entsprechenden aggregirten idealen Puncte enthalten, wie es z. B. in dem Sechsecksechsseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ statt hat, wenn die Puncte in der angeschriebenen Reihenfolge durch (ideale) gerade Linien verbunden werden. Soll der Pascal'sche Satz allgemeine Gültigkeit haben, so müssen auch hier die drei (realen) Schnittpuncte gegenüber-

liegender Seiten in einer Geraden liegen. In der der Beweisführung zu Grunde liegenden Figur ist für s_c die uneigentliche Gerade genommen. Es seien BB' die Puncte, in denen sich die Verbindungslinien der idealen Puncte auf $s_a s_c$ schneiden, AA' die Puncte, in denen sich die Verbindungslinien der auf $s_b s_c$ liegenden idealen Puncte schneiden. $K^{(2)}$ sei die Curve zweiter Ordnung, die durch die sechs idealen Puncte hindurch geht. Die Puncte AA' und die Puncte BB' sind für $K^{(2)}$ conjugirte, wie auf S. 88 bewiesen wurde. Ebenfalls dort wurde bewiesen, dass die Polare a von A durch $(s_b s_c)$, die Polare a' von A' durch $(s_b s_c)$ geht, dass $(s_b s_c)AA'$ ein Polardreieck für $K^{(2)}$ bilden, und ebenso $(s_b s_c)BB'$. Die Schnittpuncte C von $(AB')(A'B)$ und C' von $(AB)(A'B')$ sind ebenfalls für $K^{(2)}$ conjugirte Puncte nach dem Satze von Hesse. Die beiden Dreiecke $AB(a'b')$ und $A'B'(ab)$ sind einander polar und liegen folglich (Seite 77) einander perspectiv. Die Geraden $(AB')(A'B)$ und die Verbindungslinie c' der Puncte $(ab)(a'b')$ gehen durch einen Punct also durch C. Die Linie c' ist die Polare des Schnittpunctes $(AB)(A'B')$ wie bei Gelegenheit des Hesse'schen Satzes erwiesen wurde. Ebenso ist c, die Verbindungslinie $(a'b)$ (ab'), die Polare von C und geht durch C'. Also bilden $cc'(CC')$ ein Polardreiseit. Die Geraden cc' sind Nebenseiten des Vierseits $aa'bb'$. Die Geraden $bs_a b's_c$ bilden einen harmonischen Büschel, schneidet man ihn durch a oder a', so erhält man vier harmonische Puncte. In unserer Zeichnung ist s_c die uneigentliche Gerade, es muss deshalb s_a durch die Mitte von $(ab')(ab)$ und durch die Mitte von $(a'b')(a'b)$ gehen, und folglich muss s_a durch den Schnittpunct der Nebenseiten cc' des Vierseits $aa'bb'$ gehen. Ebenso muss s_b durch den Schnittpunct (cc') gehen. Nun ziehen wir durch (ab) und (cs_c) eine Gerade γ (in der Zeichnung eine c parallele Gerade), so bilden $ac'b\gamma$ einen harmonischen Büschel, weil sie die harmonische Punctreihe $(ac)(cc')(bc)(c\gamma)$ projiciren, und diese Strahlen gehen auf s_c durch dieselben Puncte als $s_a c' s_b c$, folglich sind auch diese Geraden harmonische Strahlen, es ist CC' von $s_a s_b$ harmonisch getrennt. Demnach liegen CC' auf der Polare von $(s_a s_b)$, denn dieser Punct fällt mit (cc') zusammen, C ist von C' durch $s_a s_b$ harmonisch getrennt, und C ist C' conjugirt, folglich sind CC' die Puncte, von denen die Involutionen für $K^{(2)}$ conjugirter Puncte auf $s_a s_b$, also die gegebenen Involutionen gleichzeitig projicirt werden, es sind die Puncte, in denen sich die Verbindungslinien der idealen Doppelpuncte dieser Involutionen schneiden. Die Puncte $AA'BB'CC'$ sind die Schnittpuncte gegenüberliegender Seiten der Sechsecksechsseite, die aus

den sechs idealen Ecken $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ so gebildet werden können, dass sich die gegenüberliegenden Seiten real schneiden. Diese Schnittpuncte liegen viermal zu je dreien auf einer Geraden, sie bilden die Ecken eines Vierseits. Jede solche Gerade ist die Pascal'sche Gerade eines der vier Sechsecksechsseite, die aus $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ den ausgesprochenen Bedingungen gemäss gebildet werden können. Der Pascal'sche Satz gilt also auch für den Fall, dass die Ecken des Pascal'schen Sechsecksechsseits ideale sind.

Gehen die drei Geraden $s_a s_b s_c$ durch einen Punct, so liegen die sechs Puncte $AA'BB'CC'$ auf einer Geraden, nämlich auf der Polare des gemeinsamen Punctes, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ Puncte einer Curve zweiter Ordnung sind.

Die bisher gewonnenen Mittel dürften ausreichen, den Satz von Desargues für ideale Dreiecke zu erweisen, was dem Leser überlassen bleibt. Dabei wird der Satz auf Seite 20 (Fig. 7) Verwendung finden. — Liegen drei Involutionen auf drei Geraden durch einen Punct, so liegen die sechs Puncte, von denen sie paarweise gleichzeitig projicirt werden, viermal zu je dreien in einer Geraden.

Der Pascal'sche Satz lieferte, wenn fünf Puncte gegeben waren, die Mittel, die durch diesen Punct gehende Curve zweiter Ordnung punctweise zu construiren. Sind aber drei ideale Punctpaare gegeben, die die Bedingung erfüllen, welche von uns für diesen Fall als die Pascal'sche bezeichnet wurde, so folgen aus dieser Bedingung nicht die Mittel zur Construktion der Curve, es wird sich vielmehr zeigen, dass aus der Erfüllung dieser Bedingung gar nicht die Existenz einer durch die drei Paare idealer Puncte gehenden Curve zweiter Ordnung folgt, wenn man nicht ideale Curven einführt, was allerdings möglich ist.

Ist von fünf Puncten wenigstens einer ein realer M, so liefert die folgende Construktion in jedem Falle auf einer beliebigen durch M gehenden Geraden g den zweiten Schnittpunct mit der durch die fünf Puncte bestimmten Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$. — Zwei Paare von Puncten seien als Doppelpuncte von Involutionen auf den Geraden $g'g''$ gegeben (Fig. 48, Taf. XI) und M sei der fünfte, ein realer Punct. Die Polare h des Punctes $(g'g'')$ für $K^{(2)}$ ist als die Verbindungslinie der $(g'g'')$ auf g' und g'' gepaarten Puncte gegeben. Die Polare h' von $(g''g)$ geht durch den Punct Q'' der (gg'') in der Involution auf g'' gepaart ist, und die Polare h'' von (gg') geht durch den Punct Q' der (gg') auf g' gepaart ist, und die Dreiseite $gg'g''$, $hh'h''$ müssen (siehe Seite 77)

einander perspectiv sein, es müssen $(hg)(h'g')(h''g'')$ drei Puncte einer Geraden f sein. Von diesen Puncten ist einer, nämlich (hg) gegeben. Durch ihn legen wir eine Reihe von Geraden $f_1 f_2 f_3 ..$ die g' bez. in $H'_1 H'_2 H'_3 ..$, g'' in $H''_1 H''_2 H''_3 ..$ treffen. Die Geraden des Büschels $Q''(H'_1 H'_2 H'_3 ..)$ mögen mit $h'_1 h'_2 h'_3 ..$, die Geraden des Büschels $Q'(H''_1 H''_2 H''_3 ..)$ mit $h''_1 h''_2 h''_3 ..$ bezeichnet werden, so ist das $gg'g''$ polare Dreiseit $hh'h''$ unter den Dreiseiten $hh'_1 h''_1$, $hh'_2 h''_2$, $hh'_3 h''_3 ..$ zu suchen. Die Puncte (gh'_1) $(gh'_2)(gh'_3) ..$ seien durch $S'_1 S'_2 S'_3 ..$, die Puncte $(gh''_1)(gh''_2)(gh''_3) ..$ seien durch $S''_1 S''_2 S''_3 ..$, die Geraden $Q''(g'h)$ und $Q'(g''h)$ durch k' und k'' gekennzeichnet. Sind $h'h''$ die Polaren von $(gg'')(gg')$ für $K^{(2)}$, so müssen die Puncte $MM . (gg')S'' . (gg'')S'$ in Involution sein, als Paare für $K^{(2)}$ conjugirter Puncte auf g. Lässt man die Geraden f der Reihe nach auf g und h fallen, und durch $(g'g'')$ gehen, so findet man $(gg')(gg'')(gk')S'_1 S'_2 .. \barwedge (gg'')(gg')(gk'')S''_1 S''_2 ..$ und es ist diese (beiläufig involutorische) Projectivität durch die drei ersten Paare bestimmt, so dass zu ihrer Constituirung von den Geraden $f_1 f_2 ..$ keine gezogen zu werden braucht.

Bestimmt man die Puncte $X_1 X_2 X_3 ..$ so, dass $MM . (gg')S''_1 . (gg'')X_1$, $MM . (gg')S''_2 . (gg'')X_2$, $MM . (gg')S''_2 . (gg'')X_3 ..$ Involutionen sind, so ist $X_1 X_2 X_3 .. \barwedge S''_1 S''_2 S''_3 ..$ (und zwar entsprechen den Puncten $M(gg'')$ der zweiten Reihe die Puncte $M(gg')$ der ersten Reihe). Daraus folgt weiter, dass $X_1 X_2 X_3 .. \barwedge S'_1 S'_2 S'_3 ..$ ist. In dieser letzten Projectivität ist (gg') ein sich selbst entsprechender Punct. Denn kommt man in der Reihe der X zum Puncte (gg'), so kommt man entsprechend in der Reihe $S''_1 S''_2 ..$ zum Puncte (gg'') und dieser entspricht in der Reihe $S'_1 S'_2 ..$ dem Puncte (gg'). Der zweite sich selbst entsprechende Punct sei S' und ihm entsprechend in der Reihe $S''_1 S''_2 ..$ der Punct S''. Alsdann bestimmen $Q''S'$, $Q'S''$ die Polaren $h'h''$ der Puncte $(gg'')(gg')$ für $K^{(2)}$. Der Schnittpunct N der Geraden g mit $K^{(2)}$ ist der zweite Doppelpunct der Involution $MM . (gg')S'' . (gg'')S'$, also der Punct, der durch $(gg')S''$ von M harmonisch getrennt ist.

Dreht man die Gerade g um M, so kann, wenn die Involutionen auf $g'g''$ nicht beide elliptische sind, für specielle Lagen von g der Fall eintreten, dass die Projectivität $X_1 X_2 X_3 .. \barwedge S'_1 S'_2 S'_3 ..$ eine parabolische ist, dass also nur der eine sich selbst entsprechende Punct (gg') vorhanden ist. Es müssen dann $(gg')(gg'')$ für $K^{(2)}$ conjugirte Puncte sein, und der zweite Schnittpunct N von g und $K^{(2)}$ ist von M durch $(gg')(gg'')$ harmonisch getrennt.

Sind auf drei Geraden $gg'g''$ Involutionen gegeben, von denen wenigstens eine, etwa die auf g, hyperbolisch ist, und sind $hh'h''$ die Verbindungslinien der Puncte, die den Schnittpuncten $(g'g'')$ $(g''g)$ (gg') in diesen Involutionen gepaart sind, und liegen die Dreiseite $gg'g''$, $hh'h''$ perspectiv, so geht durch die sechs Doppelpuncte dieser Involutionen eine Curve zweiter Ordnung. — Denn durch die Doppelpuncte auf $g'g''$ und einen Doppelpunct M auf g giebt es eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, der zweite Schnittpunct N' von g mit ihr gehört zu der Involution $MM \,.\, N'N' \,.$ $(gg')(gh'') \,.\, (gg'')(gh')$, und es ist die Lage von $h'h''$ durch die beiden Bedingungen, dass diese Involution besteht, und dass $gg'g'' \overline{\wedge}\, hh'h''$ ist, völlig bestimmt. Der Punct N der gegebenen Involution auf g ist nach der Voraussetzung ebenfalls ein Doppelpunct der Involution $MM \,.\, NN \,.\, (gg')(gh'') \,.\, (gg'')(gh')$ und muss daher mit N' zusammenfallen. Die Curve $K^{(2)}$ geht durch N.

Die Gültigkeit dieses Satzes lässt sich nicht ohne Weiteres für den Fall behaupten, dass alle drei Involutionen elliptisch sind, dass die gegebenen sechs Puncte ideale sind. Will man die Gültigkeit unter allen Umständen aufrecht erhalten, so muss man ideale Curven zweiter Ordnung zulassen. Diese Verhältnisse werden bei Untersuchung der Curvenbüschel ins Klare gebracht werden.

Sind drei Puncte ABC und drei gerade Linien abc so gegeben, dass ABC und $(bc)(ca)(ab)$ perspective Dreiecke sind, so ist im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ bestimmt, für die A und a, B und b, C und c Pole und Polaren sind. Auf der Geraden (AC) bestimmen a und c Puncte, die mit A bez. C Paare einer Involution sind, und ebenso sind auf CB und AB Involutionen durch diese Data gegeben, durch deren Doppelpuncte die Curve $K^{(2)}$ geht. Sind die sechs Doppelpuncte ideale, so ist das Vorhandensein von $K^{(2)}$ nicht gewiss. Man kann aber leicht ohne Kenntniss der Curve $K^{(2)}$ zu einem vierten Puncte D die Polare d linear construiren, aus der Eigenschaft, dass die Dreiecke und Dreiseite BCD, CAD, ABD bez. bcd, cad, abd perspectiv liegen müssen. — Wir verbinden D mit (ac) durch eine Gerade $\mathfrak{b}$, Puncte $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \ldots$ auf $\mathfrak{b}$ mit A und C (Fig. 49, Taf. XI). Die Geraden $C(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \ldots)$ bestimmen auf a die Punctreihe $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots$, die Geraden $A(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \ldots)$ auf c die Reihe $\gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots$, und es ist $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \overline{\wedge}\, \gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots$ Fällt $\mathfrak{B}$ auf (ac), so fallen α und γ zusammen, so dass $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, \gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots$ ist. Da also $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, \gamma\gamma_1\gamma_2 \ldots \overline{\overline{\wedge}}$ $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \ldots$ ist, so liegen die drei Perspectivitätscentren dieser Gebilde in einer Geraden, in (AC), weil A und C zwei der Per-

spectivitätscentren sind. Lassen wir $\mathfrak{B}$ auf D fallen, und trifft (AD) c in D_{ca}, trifft (CD) a in D_{ac}, so ist der Schnittpunct V der Geraden $(D_{ca}D_{ac})$ und (AC) das Perspectivitätscentrum der Gebilde $\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots \overline{\wedge}\, \gamma\gamma_1\gamma_2\ldots$ Ist l eine beliebige Gerade durch V (die also durch ein entsprechendes Paar der Reihen α, γ geht), so ist $acl \,\overline{\wedge}\, ACD$, denn die Verbindungslinien der Ecken gehen durch einen Punct auf $\mathfrak{b}$. Ebenso erhält man alle Dreiseite abm, die perspectiv ABD liegen, wenn man m durch den Punct W legt, in dem sich die Geraden (AB) und $(D_{ab}D_{ba})$ schneiden, und endlich erhält man die Dreiseite $bcn \,\overline{\wedge}\, BCD$, wenn man n durch den Punct U legt, in dem sich (BC) und $(D_{bc}D_{cb})$ schneiden. Die Gerade d, die durch U und V geht, hat hiernach die Eigenschaft, dass $ABD \,\overline{\wedge}\, abd$ und $ACD \,\overline{\wedge}\, acd$ ist, und es giebt nur diese eine Linie, welche diesen Anforderungen genügt, sie muss die Polare von D sein. Die Linie WU liefert ebenfalls die Polare von D, und es müssen deshalb UVW auf einer Geraden liegen, woraus beiläufig der Satz fliesst: Ist

$$BCD \,\overline{\wedge}\, (cd)(db)(bc),\quad CAD \,\overline{\wedge}\, (ad)(dc)(ac),\quad ABD \,\overline{\wedge}\, (bd)(da)(ad)$$

so ist auch
$$ABC \,\overline{\wedge}\, (bc)(ca)(ad),$$

worin die mit Doppelbuchstaben bezeichneten Ecken die Schnittpuncte von je zwei der vier Geraden $abcd$ sind.

Man muss aber beachten, dass dieser Satz nur unter der Voraussetzung erwiesen ist, dass wenigstens für eins der vier Dreiecke, etwa ABC und sein zugehöriges abc (in Folge dessen für alle vier) eine Curve $K^{(2)}$ existirt, für welche ABC und abc Pol und Polare sind. Wollte man auf diesen Satz eine Theorie des Polarsystems gründen, so müsste man ihn direct beweisen. So wie die Involution zur Definition idealer Elementargebilde benutzt werden konnte, so lässt sich allerdings auf ein widerspruchsfreies System von Pol und Polare in der Ebene, welches jedem Puncte eine Gerade als Polare, jeder Geraden einen Punct als Pol zuweist, die Definition einer idealen Curve und eines idealen Büschels zweiter Ordnung gründen. Doch soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden, aber man sieht, dass die zuletzt behandelten Sätze zur Einführung idealer Gebilde zweiter Ordnung drängen. Diese werden ebenso gefordert, wenn man den auf Seite 65 gegebenen Satz umkehren will, dass zwei Polardreiecke einer Curve zweiter Ordnung eingeschrieben und einer Curve zweiter Ordnung umschrieben sind. Sind zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einer Curve $\mathfrak{K}^{(2)}$ zweiter Ordnung eingeschrieben, und werden die Geraden $(BC)(CA)(AB)$ bez. mit abc bezeichnet, und $(B'C')$ mit a', die Geraden $(A'A)$,

$(A'B)$, $(A'C)$ bez. mit $s_a s_b s_c$, so werden durch die Voraussetzung, dass die Dreiecke Polardreiecke sind, auf den drei Geraden s Involutionen gegeben, die durch je zwei Paare $A'(a's_a) \,.\, A(as_a)$, $A'(a's_b) \,.\, B(bs_b)$, $A'(a's_c) \,.\, C(cs_c)$ bestimmt sind. Die drei Puncte, die A' in diesen Involutionen gepaart sind, liegen auf einer Geraden, auf a', und es geht deshalb eine Curve zweiter Ordnung, die fünf von den Doppelpuncten dieser Involutionen enthält, (nach Seite 90) auch durch den sechsten. Existirt eine Curve $K^{(2)}$ durch die sechs Puncte, was nur dann ungewiss ist, wenn diese Puncte sämmtlich ideale sind, so ist für sie ABC ein Polardreieck, und $A'a'$ sind Pol und Polare. Ist nun für $K^{(2)}$ dem Puncte B' der Punct C'' auf a' conjugirt, so geht durch $ABCA'B'C''$ nach dem Satze, um dessen Umkehrung es sich handelt, eine Curve zweiter Ordnung, und da diese mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ fünf Puncte gemein hat, so muss C'' mit C' zusammenfallen. Falls demnach $K^{(2)}$ existirt, so sind ABC, $A'B'C'$ Polardreiecke für diese Curve, falls aber $K^{(2)}$ nicht existirt, so wird man wieder auf ideale Curven zweiter Ordnung hingewiesen.

Sich doppelt berührende Curven zweiter Ordnung. Liegen auf einer Curve zweiter Ordnung K zwei projective Punctreihen $ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots$, so bestimmen die Verbindungslinien $(AA')(BB')(CC') \ldots$ oder $abc \ldots$ einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der sich auf eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$ stützt, die K doppelt berührt. Der erste Theil dieses Satzes wurde auf S. 66 erwiesen. Ist (Fig. 50, Taf. XII) G ein Punct auf der Perspectivitätsachse h der Punctreihen, und zieht man GAA'', GBB'', GCC'', so gehen, wie eben an der angezogenen Stelle bewiesen wurde, die Geraden $A''A'$, $B''B' \ldots$ durch einen Punct G' auf h. A sei so gewählt, dass $GAA''(u)$ durch den Pol H von h geht, so bestimmen (AA'), $(A''A')$ auf h conjugirte Puncte, weil u und h conjugirt sind (siehe Seite 80), die Puncte G' und Q'. Ebenso bestimmen die Strahlen $G'A\alpha$, $A''\alpha$ conjugirte Puncte, d. h. $(A''\alpha)$ geht durch den Punct Q', $HQ'G'$ bilden ein Polardreieck, H ist der Schnittpunct von (AA''), $(A'\alpha)$ und $(A'\alpha)(v)$ ist ebenfalls h conjugirt. In der Projectivität $ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots$ sind die Puncte $AA''B$ und $A'\alpha B'$ entsprechende, denn man findet den A'' als Punct der ersten Reihe in der zweiten Reihe entsprechenden Punct dadurch, dass man den zweiten Schnittpunct von GA'' mit K, also A mit G' verbindet, der zweite Schnittpunct dieser Linie mit K, also α, ist der entsprechende. (AA') und $(A''\alpha)$ sind Strahlen des Büschels $B^{(2)}$, der sich auf $\mathfrak{K}$ stützt. Für $\mathfrak{K}$ enthält die Gerade $w(Q'H)$ den Pol von h, weil $h(Q'A)w(Q'\alpha)$ har-

monische Strahlen sind. Stellt man dieselben Betrachtungen noch einmal an, indem man von den Geraden $G'\mathfrak{A}H\mathfrak{A}''$ ausgeht (statt von $GAHA''$) und zu G den conjugirten Q bestimmt, so findet man ebenso, dass der Pol von h für $\mathfrak{K}$ auf der Geraden QH liegt, woraus folgt, dass hH Polare und Pol für $\mathfrak{K}$ sind.

Jetzt mögen sich die Strahlen ab $[(AA')(BB')]$ in R schneiden (Fig. 51, Taf. XII), $(AB')(A'B)$ in einem Puncte G' auf h der Perspectivitätsachse der projectiven krummen Reihen, und RH möge auf h den G' für K conjugirten Punct G bestimmen. Zeichnen wir dann eine Curve $\mathfrak{K}$, für die H und h Pol und Polare sind, und für welche die Involution für K conjugirter Puncte auf h eine zugehörige ist, und die endlich a berührt, so ist diese Curve $\mathfrak{K}$ völlig bestimmt (Seite 83). Die Strahlen (RH) und (RG') sind auch für $\mathfrak{K}$ conjugirt, weil G' Pol von RH auch für $\mathfrak{K}$ ist. Die zweite Tangente von R an $\mathfrak{K}$ ist von a durch $(RH)(RG')$ harmonisch getrennt. Nun schneiden sich $(AB)(A'B')$ in einem Puncte R' der Polaren von G' also auf GRH, die zweite Tangente von R an $\mathfrak{K}$ ist mithin die Gerade b. Ebenso sind die Geraden cd.. Tangenten an $\mathfrak{K}$, die Geraden $abcd$.. stützen sich also auf eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$, die mit K ein Polardreieck HGG' gemein hat, und auf der einen Seite h dieses Dreiecks sind die Paare für K conjugirter Puncte auch für $\mathfrak{K}$ conjugirt. Die realen oder idealen Doppelpuncte dieser Involution auf h gehören K und $\mathfrak{K}$ zugleich an, durch sie gehen die realen oder idealen Tangenten von H an K und an $\mathfrak{K}$. Die Curven K und $\mathfrak{K}$ berühren sich doppelt, real oder ideal.

Umkehrung. Die Tangenten an eine Curve zweiter Ordnung bestimmen auf einer diese Curve doppelt berührenden Curve zweiter Ordnung projective Punctreihen. — Der Beweis dieses Satzes wird gleichzeitig mit dem des folgenden geführt: Die Tangenten an eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$ treffen eine diese doppelt berührende Curve zweiter Ordnung K in Puncten, die den Stützpuncten der Tangenten projectiv sind. Das heisst, sind $\alpha\beta\gamma$.. die Stützpuncte der Tangenten abc.. an $\mathfrak{K}$, und sind ABC.. bez. $A'B'C'$.. die Treffpuncte der Tangenten abc.. mit K, und projicirt man $\alpha\beta\gamma$.. von einem Puncte auf $\mathfrak{K}$, ABC.. oder $A'B'C'$.. von einem Puncte auf K, so erhält man projective Strahlbüschel. — Da jede Tangente K zweimal trifft, so kann man bei jeder Tangente zweifelhaft sein, welcher Punct zu wählen ist, ich meine, es kann fraglich erscheinen, ob $\alpha\beta\gamma$.. $\barwedge$ ABC.. oder $AB'C$.. u. s. w. ist. Die Beweisführung lässt erkennen, dass einem continuirlichen Uebergange von α nach β nach γ.. ein continuirlicher Ueber-

gang von A nach B nach C.. entsprechen muss. Die Geraden ab (Fig. 52, Taf. XII) mögen $\mathfrak{K}$ in α und β berühren, K in AA', BB' treffen. G sei der Schnittpunct von $(\alpha\beta)$ mit der Geraden h, die die Berührungspuncte von $\mathfrak{K}$ und K enthält, und die den gemeinsamen Pol H für beide Curven hat. (In der Zeichnung ist h die uneigentliche Gerade.) Dann ist die Verbindungslinie g von H mit R (ab), die gemeinsame Polare von G für $\mathfrak{K}$ und K, weil die für eine Curve conjugirten Geraden durch H auch für die andere conjugirt sind. Diese Polare wird aber auch gefunden als die Verbindungslinie von R mit dem Schnittpuncte R' der Geraden $(AB)(A'B')$. Die Puncte $(ab)R'H$ liegen daher auf einer Geraden g, der Polare von G. Ziehen wir die Geraden $(GA)(GA')$, so treffen sie K in Puncten $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ für die $ag(R\mathfrak{B}')(RG)$ und $ag(R\mathfrak{B})(RG)$ harmonische Strahlen sind, die Geraden $R\mathfrak{B}$ und $R\mathfrak{B}'$ müssen deshalb mit b zusammenfallen, denn $agb(RG)$ sind nach den Sätzen über Pol und Polare harmonische Strahlen. Man kann daher auch behaupten $(A'B)(\alpha\beta)(AB')$ schneiden sich in einem Puncte G der durch die Berührungspuncte von K und $\mathfrak{K}$ gehenden Sehne h. Lassen wir jetzt die Tangente b in die Tangenten cd.. übergehen, so bleiben $AA'\alpha$ fest, G beschreibt auf h eine gerade Punctreihe, und die Büschel $A(B'C'D'A'..)$ und $A'(BCDA..)$ und $\alpha(\beta\gamma\delta\alpha..)$ sind projectiv, und es ist $A'B'C'D'..$ $\barwedge$ $ABCD..$ $\barwedge$ $\alpha\beta\gamma\delta..$ und (nach Seite 46) auch $\barwedge$ $abcd..$, w. z. b. w.

Diesen Satz kann man benutzen zu einer vorläufigen Lösung der Aufgabe: Durch drei Puncte ABC ausserhalb einer Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$ eine Curve zweiter Ordnung K zu legen, die $\mathfrak{K}$ doppelt berührt. Durch ABC ziehe man drei Tangenten abc an $\mathfrak{K}$ und ziehe eine beliebige vierte Tangente d. Auf d suche man den Punct D' für den $d(D'A)(D'B)(D'C) \barwedge dabc$ ist, er ist ein Punct von K. Der Punct D' wurde auf Seite 16 linear gefunden. Von ABC lassen sich je zwei Tangenten aa', bb', cc' ziehen, und so auf acht verschiedene Arten drei abc auswählen. Aber abc und $a'b'c'$ führen zu derselben Curve K, so dass die Aufgabe vier Lösungen hat.

Die Lösung dieser Aufgabe für den Fall, dass ABC innerhalb liegen, oder, dass zwei dieser Puncte ideal sind, muss verschoben werden.

Die absolute Involution und die absoluten Puncte. Auf der uneigentlichen Geraden nehmen wir eine beliebige aber ein- für allemal bestimmte elliptische Involution an und nennen sie die absolute Involution, ihre idealen Doppelpuncte die beiden

absoluten Puncte der Ebene. Diese Involution ist durch zwei Paare einer sie projicirenden Strahleninvolution gegeben. Jede Curve zweiter Ordnung, die durch die absoluten Puncte geht, nennen wir einen Kreis. Es wird passend sein, die absolute Involution durch die Involution conjugirter Durchmesser der Curve zweiter Ordnung zu definiren, die als Grundlage einer Massbestimmung sowohl als auch als Hülfsmittel zur Lösung von Aufgaben zweiten Grades in der Ebene continuirlich gegeben gedacht wird, und die schon früher die Masscurve genannt wurde. Die idealen Doppelstrahlen der Involution conjugirter Durchmesser dieser Curve sind die Tangenten vom Mittelpuncte an die Curve, und die idealen Berührungspuncte sind die absoluten Puncte, die Schnittpuncte der unendlich fernen Geraden, als der Polare des Mittelpunctes, mit der Curve. Die Masscurve ist in unserer Sprache ein Kreis, der Masskreis. Von zwei Geraden, die durch ein Paar der absoluten Involution gehen, sagen wir, sie stehen senkrecht auf einander, sie bilden einen rechten Winkel. Wir wollen fortan den Ausdruck „die Elemente eines Paares einer Involution sind durch die Doppelelemente harmonisch getrennt" auch dann gebrauchen, wenn die Doppelelemente ideal sind. Alsdann kann man definiren: Zwei gerade Linien schneiden sich rechtwinklig, wenn sie harmonisch durch die absoluten Puncte getrennt sind. Die Paare einer Strahleninvolution, die die absolute Involution projicirt, stehen senkrecht aufeinander, die conjugirten Durchmesser der Masscurve und die eines jeden Kreises stehen senkrecht aufeinander. Eine Strahleninvolution durch einen Punct enthält entweder ein rechtwinkliges Paar, hat mit der Involution der aufeinander senkrecht stehenden Geraden durch denselben Punct ein und nur ein Paar gemein (Seite 84), oder alle Paare.

Die Involution conjugirter Durchmesser irgend einer Curve zweiter Ordnung besteht entweder aus lauter rechtwinkligen Paaren, dann ist die Curve ein Kreis, oder besitzt nur ein rechtwinkliges Paar, die Geraden dieses Paares heissen Achsen der Curve, ihre Schnittpuncte mit der Curve, wenn sie real sind, heissen Scheitel der Curve. Die Ellipse hat vier Scheitel, weil jeder Durchmesser die Curve zweimal real trifft; die Hyperbel hat zwei Scheitel, weil von einem Paare conjugirter Durchmesser immer der eine die Curve real, der andere ideal trifft. Bei der Parabel sind die Durchmesser einander parallel, jeder ist dem uneigentlichen Durchmesser conjugirt. Da dieser uneigentliche Durchmesser durch die absoluten Puncte geht und jeden Punct der absoluten In-

volution enthält, so kann man entweder von keiner, oder wenn man will auch von jeder Geraden sagen, sie stehe senkrecht auf der uneigentlichen Geraden. Aber nur ein Durchmesser steht senkrecht auf der Schaar von Sehnen, die ihm conjugirt sind, nämlich der Durchmesser, der durch die Mitten der Sehnen desjenigen Parallelstrahlenbüschels geht, dessen Träger von dem uneigentlichen Puncte der Parabel durch die absoluten Puncte harmonisch getrennt ist. Dieser Durchmesser heisst Achse der Parabel, sie liefert nur einen Scheitel, wenn man nicht den uneigentlichen Punct der Parabel als zweiten Scheitel ansehen will. Ebenso könnte man vielleicht die uneigentliche Gerade als zweite Achse ansehen. Um die Achse der Parabel zu finden, ziehe man zwei parallele Sehnen (die die Curve real schneiden), verbinde ihre Mitten, so hat man einen Durchmesser, und damit den uneigentlichen Punct der Parabel. Man zeichne dann zwei Sehnen senkrecht zu diesem Durchmesser, ihre Mitten bestimmen die Achse.*) Die Aufgabe, die Achse einer Ellipse oder Hyperbel zu construiren, ist nicht linear. Da es sich darum handelt, das gemeinsame Paar zweier Involutionen zu finden, so wird sie durch die auf Seite 84 gegebenen Mittel gelöst. Die Tangente in einem Scheitel einer Curve zweiter Ordnung steht senkrecht auf der durch diesen Scheitel gehenden Achse, denn sie gehört mit zu den Sehnen, die dieser Achse als einem Durchmesser conjugirt sind.

Ein Kreis geht durch die absoluten Puncte und ist deshalb durch drei weitere Puncte ABC vollständig bestimmt, man kann ihn nach Seite 81 construiren. Man kann ihn aber auch durch die in der elementaren Geometrie gebräuchliche Construktion wie folgt finden. Man legt durch die Mitte von AB eine Gerade senkrecht zu (AB), was linear ausführbar ist. Diese Gerade geht durch den Pol der uneigentlichen Geraden, durch den Mittelpunct des Kreises. Die Gerade, die senkrecht auf (BC) in der Mitte von BC steht, ebenfalls, die beiden Geraden bestimmen den Mittelpunct M. Bestimmt man dann $A'B'C'$ so, dass M die Mitte von AA', BB', CC' ist (Seite 18), so hat man sechs Puncte des Kreises und findet beliebig viele weitere Puncte desselben mittels des Pascal'schen Satzes.

*) Die Aufgabe, zu einer Geraden eine senkrechte zu ziehen, ist eine lineare, wenn die absolute Involution durch eine sie projicirende Strahleninvolution gegeben ist, erfordert aber die Construktion von parallelen Geraden. Dass die Auffindung der Parabelachse eine lineare Aufgabe ist, wenn auch die Parabel nur durch einzelne Puncte gegeben ist, wird leicht eingesehen.



Concentrische Kreise, d. h. Kreise, die denselben Mittelpunct haben, berühren sich in den absoluten Puncten doppelt, weil die (idealen) Tangenten an beide Kreise vom Mittelpuncte beide in den absoluten Puncten berühren. Nicht concentrische Kreise schneiden sich ausser in den absoluten Puncten noch in zwei und nur zwei realen oder idealen Puncten, oder sie berühren sich.

Verbindet man einen Punct eines Kreises mit den Endpuncten eines Durchmessers, so bilden diese Verbindungslinien (nach Seite 80) einen rechten Winkel. (Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.)

Wann geht durch vier reale oder ideale Puncte ein Kreis? Die vier Puncte seien die Doppelpuncte von Involutionen auf $s_a s_b$, die absolute Involution werde mit s_c, die Puncte $(s_b s_c)$ $(s_c s_a)(s_a s_b)$ werden bez. mit ABC bezeichnet, und die Verbindungslinie der A auf s_b und s_c gepaarten Puncte sei a, die der B gepaarten Puncte sei b, die der C gepaarten Puncte sei c, so muss das Dreieck ABC dem Dreieck $(bc)(ca)(ab)$ perspectiv liegen. Sind die Doppelpuncte auf $s_a s_b$ ideale, so kann noch eine andere Bedingung angegeben werden. Die Schnittpuncte der idealen Geraden, welche diese idealen Puncte verbinden (Seite 87), seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, und die Schnittpuncte der Verbindungslinien der absoluten Puncte mit den idealen Puncten auf s_a seien $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, die Schnittpuncte der Verbindungslinien der idealen Puncte von s_b mit den absoluten seien $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. Dann ist die Bedingung dafür, dass ein Kreis durch die Doppelpuncte auf s_a und s_b geht, die, dass die Puncte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ Ecken eines Vierseits sind.

Es giebt stets zwei und nur zwei Puncte, von denen aus die Paare einer elliptischen Involution durch eine Strahleninvolution mit rechtwinkligen Paaren projicirt werden, diese Puncte sind (nach Seite 89) die Schnittpuncte der Verbindungslinien der absoluten Puncte mit den idealen Doppelpuncten der elliptischen Involution. Eine hyperbolische Involution lässt sich nicht durch eine rechtwinklige Strahleninvolution projiciren.

Brennpuncte. Die Puncte, in denen die Paare für eine Curve $K^{(2)}$ conjugirter gerader Linien senkrecht aufeinander stehen, heissen Brennpuncte. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise, wenn man sie als die Schnittpuncte der von den absoluten Puncten an $K^{(2)}$ gezogenen Tangenten bezeichnet, denn diese Tangenten sind eben die Doppelstrahlen zu $K^{(2)}$ gehöriger Involutionen, deren Paare rechtwinklig sind. Ehe wir uns mit der Aufgabe, die Brennpuncte einer Curve zweiter Ordnung zu construiren, beschäftigen, wollen wir die dazu dualistische Aufgabe

lösen. — Ist eine Strahleninvolution G im Puncte G gegeben und eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so soll eine Gerade h so gezogen werden, dass die Involution G auf ihr eine $K^{(2)}$ zugehörige Involution bestimmt, mit anderen Worten, h soll durch zwei Schnittpunkte der Doppelstrahlen der Involution G mit $K^{(2)}$ gelegt werden. Dabei nehmen wir an, dass G nicht $K^{(2)}$ zugehörig ist, in welchem Falle die Polare von G die Aufgabe lösen würde.

Hat die Involution reale Doppelstrahlen und treffen beide die Curve, so ist die Lösung trivial, es giebt vier gerade Linien h, welche der Aufgabe genügen. Trifft ein Doppelstrahl die Curve, der andere nicht, so giebt es keine reale Lösung der Aufgabe. Treffen beide Doppelstrahlen $K^{(2)}$ nicht, so lösen die idealen Verbindungslinien der idealen Schnittpuncte der Doppelstrahlen mit $K^{(2)}$ die Aufgabe. Die Construction der realen Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mag dem Leser überlassen bleiben.

Hat aber die Involution G ideale Doppelstrahlen, so verfahren wir in folgender Weise (Fig. 53, Taf. XII). Auf der Polare g von G giebt es ein und nur ein Paar conjugirter Puncte LM, durch die ein Paar der Involution G geht (s. S. 84), weil die Involution G eine elliptische ist, und G nicht zu $K^{(2)}$ gehörig ist. Die Puncte GLM bilden ein Polardreieck für $K^{(2)}$. Die Geraden h, welche unserer Aufgabe Genüge leisten, müssen durch L oder M gehen. Denn trifft die Gerade h die Gerade g im Puncte Q, und ist Q' der Q conjugirte auf h, so sind (GQ) (GQ') sicher nicht ein Paar der Involution G, weil sonst die Involution G mehr als ein Paar conjugirter Strahlen besässe, und also $K^{(2)}$ zugehörig sein müsste, was gegen die Voraussetzung ist. — Auf einer Geraden durch L, die (GM) in M' trifft, ist LM' ein Paar conjugirter Puncte, und zwar ein Paar, das auf einem Paare der Involution G liegt. Nun seien nn' ein Paar in G, nn' sind durch $(GL)(GM)$ getrennt, weil G eine elliptische Involution ist. Den Puncten $ABC\,..$ auf n seien die Puncte $A'B'C'\,..$ auf n' conjugirt, so ist $ABC\,.. \overline{\wedge}\, A'B'C'\,..$ Projicirt man diese Punkte von L aus, so bilden die Strahlen $L(AA'.BB'.CC'..)$ eine Involution, denn g und (LG) sind ein Paar. Ist h ein Doppelstrahl dieser Involution, so löst er unsere Aufgabe, denn er enthält ausser L und $[(GM)\ h]$ noch ein Paar conjugirter Puncte, etwa PP'. Ebenso giebt es in M eine Involution, deren Doppelstrahlen die Aufgabe lösen, aber nur in einer dieser beiden Involutionen in L und M sind die Doppelstrahlen reale, so dass nur zwei reale gerade Linien der Aufgabe genügen. Denn wird von L aus

die Involution $AA'.BB'..$ durch Strahlenpaare projicirt, die durch g, (GL) nicht getrennt sind, so wird dieselbe Involution von M aus durch Strahlen projicirt, die durch g (GM) getrennt sind, weil nn' durch LM getrennt sind. Die eine der Involutionen in L und M ist demnach elliptisch, die andere hyperbolisch. — Liegt G auf $K^{(2)}$, so wird diese Lösung hinfällig, weil g durch G geht. In diesem Falle sei t die Tangente in G (die Polare von G), t' die t in G gepaarte Gerade. Dann muss die gesuchte Gerade durch den Pol Q von t' gehen, der auf t liegt. Denn trifft die Gerade h die Tangente t in R, dessen Polare r ist, so ist tr nicht ein Paar der Involution G, wenn R nicht auf Q fällt. Sind nun nn' ein Paar von G, und sind den Puncten $ABC..$ auf n die Puncte $A'B'C'..$ auf n' conjugirt, so ist $ABC.. \overline{\wedge} A'B'C'..$, weil G sich selbst conjugirt ist. Die Verbindungslinie des Perspectivitätscentrums mit Q ist die gesuchte Gerade h, denn es gehen zwei Strahlenpaare der Involution G nämlich tt', nn' durch conjugirte Paare auf ihr. Es giebt in diesem Falle nur eine Lösung, man kann etwa die Tangente t als Nebenlösung ansehen, weil sie von jedem Strahle der Involution G im Träger G derselben getroffen wird, der sich selbst conjugirt ist, von der Tangente selbst aber in jedem Puncte getroffen wird, und jeder Punct auf t wiederum G conjugirt ist.

Die dualistische Aufgabe, die die Brennpunctsaufgabe als speciellen Fall enthält, lautet: Ist eine Punctinvolution g auf der Geraden g gegeben, und eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$, so soll ein Punct H so bestimmt werden, dass die Paare conjugirter gerader Linien durch H der Involution g perspectiv liegen, mit anderen Worten, es sollen die Schnittpuncte der durch die Doppelpuncte einer Involution g gehenden Tangenten an $K^{(2)}$ gezeichnet werden.

Hat die Involution g reale Doppelemente, und giebt es durch jedes derselben reale Tangenten an $K^{(2)}$, so ist die Lösung der Aufgabe trivial. Es giebt vier Tangentenschnittpuncte. Giebt es von einem Doppelpuncte reale Tangenten, von anderen nicht, so giebt es keine realen Schnittpuncte derselben, giebt es von keinem reale Tangenten, so giebt es keine realen Puncte H, wohl aber lassen sich zwei Involutionen auf realen Geraden angeben, deren ideale Doppelelemente der Aufgabe genügen. Die Untersuchung dieses Falles bleibt dem Leser überlassen.

Ist die Involution auf g eine elliptische (Fig. 54, Taf. XII), so giebt es ein und nur ein Paar durch den Pol G von g gehender conjugirter Geraden lm, die durch ein Paar der Involution auf

g gehen, weil diese elliptisch ist und weil wir den trivialen Fall ausschliessen, dass g eine $K^{(2)}$ zugehörige Involution ist. In der Zeichnung ist für g die absolute Involution genommen. In jedem Punct auf l, der mit (gm) die Gerade m' bestimmt, ist lm' ein Paar conjugirter Strahlen für $K^{(2)}$, das zugleich durch ein Paar auf g geht, weil lmg ein Polardreieck bilden. Ebenso sind m und eine durch einen Punct auf m und durch (gl) gehende Gerade ein Paar conjugirter Strahlen, die durch ein Paar auf g gehen. Die Puncte H, welche unserer Aufgabe genügen, müssen nothwendig auf l oder m liegen. Denn verbindet man H mit G durch q, und ist q' der q conjugirte Strahl durch H, so bestimmen qq' auf g Punkte, die kein Paar sind, weil sonst g zu $K^{(2)}$ gehören müsste, was gegen die Voraussetzung ist. — Nun seien NN' ein von $(gl)(gm)$ verschiedenes Paar der Involution auf g, es ist durch $(gl)(gm)$ getrennt. Den Geraden abc .. durch N seien die Geraden $a'b'c'$.. durch N' conjugirt, so folgt, dass $abc .. \overline{\wedge}$ $a'b'c'$.. ist. Diese Geraden bestimmen auf l eine Involution $l(aa'.bb'.cc'..)$, denn G und (lg) bilden ein Paar. Ist H ein doppelter Punct der Involution, ein Schnittpunct der durch die Büschel $abc .. \overline{\wedge}\, a'b'c'$.. erzeugten Curve mit l, so ist er eine Lösung der Aufgabe, denn er enthält ausser dem Paare $l(H(gm))$ noch ein Paar conjugirter Strahlen, etwa pp', welche durch ein Paar der Involution auf g gehen, nämlich die beiden entsprechenden Strahlen der Gebilde abc .., $a'b'c'$.., die sich in H auf l treffen. — Es giebt nur auf einem der Strahlen lm reale Puncte H, denn treffen die Strahlen aa' die Gerade l in Puncten, die durch $G(lg)$ nicht getrennt sind, so treffen diese Strahlen m in Puncten, die durch $G(mg)$ getrennt sind, so dass die eine Involution eine elliptische, die andere eine hyperbolische ist. Es giebt demnach nur zwei reale Puncte H, die der Aufgabe genügen. Ist wie in der Zeichnung g die absolute Involution, G der Mittelpunct von $K^{(2)}$, so sind lm die Achsen der Curve, und in den Puncten H stehen zwei Paar conjugirter gerader Linien, mithin alle Paare auf einander senkrecht. Die Puncte H sind die Brennpuncte. (In der Zeichnung sind $\alpha\beta$ .. die Pole der Geraden ab ..) Die Brennpuncte liegen auf den Achsen, aber es giebt nur auf der einen Achse reale Brennpuncte.

Bei der Parabel ist der Träger der absoluten Involution Tangente, es giebt von jedem absoluten Puncte nur noch je eine Tangente an die Curve, ihr Schnittpunct bestimmt den einzigen vorhandenen Brennpunct, er liegt auf der Achse, weil durch jeden Punct, der nicht auf der Achse liegt, der Durchmesser und die ihm conjugirte Gerade ein nicht rechtwinkliches Paar bilden.

Legt man durch ein Paar der absoluten Involution Parallelstrahlbüschel (d. h. zeichnet man zwei Parallelstrahlbüschel, deren Strahlen auf einander senkrecht stehen), so sind die einander conjugirten Strahlen dieser Büschel einander perspectiv, weil die uneigentliche Gerade ein sich selbst entsprechender Strahl der Büschel ist. Der Schnitt der Perspectivitätsachse dieser Büschel mit der Parabelachse ist der Brennpunct. Die Puncte der unendlich fernen Geraden könnten etwa als uneigentliche Brennpuncte angesehen werden, denn in ihnen schneiden sich zwei (zusammenfallende) Tangenten von den absoluten Puncten an die Parabel, doch ist dies nicht üblich. Höchstens der uneigentliche Punct der Parabel selbst wird wegen anderen Eigenschaften als zweiter Brennpunct angesehen. — Beim Kreise ist die absolute Involution eine zugehörige, der Mittelpunct ist der einzige vorhandene Brennpunct.

Jedes rechtwinklige Paar conjugirter gerader Linien ist durch die Brennpuncte harmonisch getrennt. Das rechtwinklige Paar aa' unserer Zeichnung trifft l in Puncten, die von den beiden Brennpuncten harmonisch getrennt sind, weil sie ein Paar der Involution sind, deren Doppelpuncte die Brennpuncte bilden. Die Puncte NN' waren willkürlich, d. h. man kann ein beliebiges rechtwinkliges Paar für die Linien aa' zur Aufsuchung der Brennpuncte nehmen, womit der Satz allgemein erwiesen ist. Nennt man die Gerade, die in einem Puncte der Curve $K^{(2)}$ auf der zugehörigen Tangente senkrecht steht, „Normale", so hat man den Satz: Tangente und Normale einer Curve zweiter Ordnung sind durch deren Brennpuncte harmonisch getrennt. Für die Parabel gilt dieser Satz, wenn ihr uneigentlicher Punct als zweiter Brennpunct angesehen wird.

Aufgabe. Eine Curve zweiter Ordnung $K^{(2)}$ zu construiren, wenn ihre beiden Brennpuncte und eine Tangente gegeben sind. Diese Aufgabe ist bereits auf Seite 86 gelöst, denn es sind zwei Paare idealer Tangenten und eine reale gegeben. Man kann aber auch wie folgt verfahren. Die Tangente t trifft die Verbindungslinie l der Brennpuncte H und H' in einem Punct Q, die Normale geht durch den Punct Q', der von Q durch HH' auf l harmonisch getrennt ist. Zieht man durch ihn eine Gerade rechtwinklig zu t, so ist der Schnittpunct T der Berührungspunct. M, die Mitte von HH', ist der Mittelpunct der Curve. Construirt man T' so, dass M die Mitte von TT' ist, so ist T' ein zweiter Punct der Curve, und t', eine Parallele zu t durch T', ist eine zweite Tangente, weil die Tangenten in den Endpuncten eines Durchmessers einander parallel sind. Zieht man durch TT' je eine Parallele

zu den (durch die Brennpuncte unmittelbar gegebenen) Achsen der Curve, so liefert der Schnitt dieser Geraden (nach Seite 81) einen zweiten Punct der Curve. Nun hat man fünf reale Elemente derselben, die die Curve eindeutig bestimmen.

Curven zweiter Ordnung mit denselben (realen) Brennpuncten heissen confocal. Haben zwei confocale Curven einen Punct gemein, so schneiden sie sich dort (d. h. ihre Tangenten schneiden sich dort) rechtwinklig. Denn durch jenen Punct giebt es nur ein rechtwinkliges Paar (Seite 87) von Geraden, die durch die Brennpuncte harmonisch getrennt sind. Tangente und Normale der einen Curve in diesem Puncte müssen deshalb Normale und Tangente der andern Curve sein.

Will man nachweisen, dass jede nicht in ein Geradenpaar zerfallende Curve zweiter Ordnung die Projection eines Kreises ist, so muss man, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, der Natur der Sache nach noch einmal räumliche Anschauungen heranziehen. — Die Curve $K^{(2)}$ liege in der Ebene E, g sei eine Gerade, die $K^{(2)}$ nicht real trifft. Eine Ebene F werde durch g gelegt und in ihr ein Punct M bestimmt, der die Involution conjugirter Puncte auf g und die absolute Involution von F gleichzeitig projicirt. Projiciren wir nun von M aus $K^{(2)}$ in eine Ebene F' die F parallel ist, so projiciren wir $K^{(2)}$ auf eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}^{(2)}$ in F' die durch die absoluten Puncte von F' und F geht, also auf einen Kreis. Dass die Projection einer Curve zweiter Ordnung wieder eine Curve zweiter Ordnung ist, und dass eine Involution conjugirter Puncte für $K^{(2)}$ auf eine Involution conjugirter Puncte für $\mathfrak{K}^{(2)}$ projicirt wird, ist leicht zu erweisen, man muss aber dazu natürlich räumliche Betrachtungen heranziehen, weshalb wir nicht weiter auf diese Untersuchungen eingehen. Die Projectionsstrahlen von M nach $K^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(2)}$ bilden einen Kegel, will man im Sinne der Alten die Curven zweiter Ordnung Kegelschnitte nennen, so wäre man im Grunde durch die eben ausgeführten Betrachtungen dazu nicht voll berechtigt, denn die Alten verstanden darunter die Schnitte eines geraden Kegels, während der eben construirte im Allgemeinen ein schiefer ist. Es wird gleichwohl nicht anstössig sein, die Curven zweiter Ordnung auch Kegelschnitte zu nennen. Jedenfalls ist gezeigt, dass sie als Projectionen eines Kreises aufgefasst werden können.

Kapitel V.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren.

Durch vier Puncte giebt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, die man Kegelschnittbüschel nennt. Denn legt man durch einen der vier Puncte, die die Grundpuncte des Büschels heissen, eine Gerade, so trifft jeder Kegelschnitt diese Gerade noch in einem weiteren Puncte, und jeder Punct auf ihr bestimmt einen Kegelschnitt der Mannigfaltigkeit. Die Kegelschnitte des Büschels und die Puncte der Geraden stehen in eineindeutiger Beziehung zu einander, der Büschel ist daher von gleicher Mächtigkeit als die gerade Punctreihe. Diese Betrachtung ist allerdings eigentlich nur zulässig, wenn unter den Grundpuncten sich ein realer vorfindet, der Satz wird sich jedoch später auch für Büschel mit lauter idealen Grundpuncten als richtig ergeben. — Die Kegelschnitte, die vier gemeinsame Tangenten haben, stehen den Büscheln dualistisch gegenüber, sind also auch von einfach unendlicher Mannigfaltigkeit. Man ist übereingekommen die letztere Mannigfaltigkeit eine Kegelschnittschaar zu nennen, man könnte sie auch einen Büschel von Büscheln zweiter Ordnung nennen.

Wollte man als massgebendes Princip gelten lassen, dass Betrachtungen von allgemeiner Gültigkeit solchen von particularem Geltungsbereiche vorzuziehen seien, so würde man sogleich mit einer solchen Theorie der Büschel und Schaaren zu beginnen haben, die keinen Unterschied macht zwischen Büscheln mit realen oder idealen Grundpuncten, und Schaaren mit realen oder idealen Grundstrahlen. Ein solches Princip in der reinen Geometrie aufzustellen, halte ich aber für verkehrt. Es liegt für den Fall realer Grundelemente mancher Satz auf der Hand, der bei idealen erst mit einem gewissen Aufwand von Scharfsinn erwiesen werden kann, und diese Besonderheit ist an sich interessant. Die reine Geometrie verfährt synthetisch, und es liegt eben in der Natur der Synthese, dass sie vom Besondern zum Allgemeinen führt. Man ist erfreut, schliesslich zu allgemein gültigen Sätzen und Constructionen zu gelangen, wählt aber zur Erreichung dieses Zieles den Weg der Erweiterung, während man sonst wohl von allgemeinen Sätzen durch Specialisirung zu Besonderheiten gelangt. — Der einfachste Büschel ist der, der vier reale Grundpuncte, die einfachste Schaar ist die, die vier reale Grundstrahlen enthält, diese Gebilde behandeln wir zuerst.

Ein Büschel mit vier realen Grundpuncten besitzt sechs Doppelsehnen, (d. h. Sehnen, die mit allen Kegelschnitten des Büschels zwei Schnittpuncte gemein haben), nämlich die sechs Seiten des aus den vier Grundpuncten gebildeten Vierecks. — Durch die Bezeichnung Secante oder Sehne wird eine Gerade zu einer Curve in eine Beziehung gesetzt, indem man auf ihr sogleich an die Schnittpuncte mit der Curve denkt. Lässt man auch ideale Schnittpuncte zu, was durchaus sachgemäss ist, so kann jede Gerade Secante genannt werden. Es macht sich das Bedürfniss nach einer Bezeichnung geltend, welche ebenso einen Punct zu einem Büschel zweiter Ordnung oder zu den Tangenten einer Curve zweiter Ordnung in Beziehung setzt, welche ihn als Schnitt- oder Kreuzungspunct von zwei Strahlen des Büschels oder von Tangenten der Curve kennzeichnet, wobei die Tangenten auch ideale sein können. Bis ein passenderes Wort gefunden wird, will ich einen Punct, der in der besprochenen Beziehung zu einer Curve zweiter Ordnung gedacht wird, einen Kreuzpunct nennen. — Eine Kegelschnittschaar mit vier reellen Tangenten besitzt sechs Doppelkreuzpuncte, die Ecken des Vierseits, dessen Seiten die vier Grundstrahlen*) sind. Die durch die Doppelkreuzpuncte gehenden Tangenten sind dieselben für alle Curven der Schaar.

Der Kegelschnittbüschel enthält als specielle Fälle von Curven zweiter Ordnung drei Geradenpaare in sich, jedes Paar besteht aus einem Paare von Doppelsehnen, die gegenüberliegende Seiten des Grundpunctvierecks bilden. Die Kegelschnittschaar enthält als specielle Fälle von Büscheln zweiter Ordnung drei Punctpaare (Träger linearer Büschel) in sich, jedes Paar besteht aus einem Paare gegenüberliegender Ecken des Grundstrahlenvierseits.

Polardreieck des Curvenbüschels und Polardreieck der Curvenschaar. Die Nebenecken des Grundpunctvierecks bilden ein Dreieck, welches ein gemeinsames Polardreieck für alle Kegelschnitte des Büschels nach dem Mac Laurin'schen Satze ist, und die Nebenseiten des Grundstrahlenvierseits bilden ein gemeinsames Polardreieck für alle Curven der Schaar.

Die Curven eines Kegelschnittbüschels bestimmen auf einer Geraden g durch ihre Schnittpuncte eine Involution, und die Curven einer Schaar bestimmen in einem Puncte G durch die G treffenden Tangenten eine Strahleninvolution.

---

*) Bei zwei Kreisen befinden sich unter den Doppelkreuzpuncten die Aehnlichkeitspuncte.

$ABCD$ (Fig. 55, Taf. XIII) seien die Grundpuncte eines Kegelschnittbüschels, und die Gerade g treffe (BC) in P. Durch P legen wir eine Gerade p die (AB) in U, (DC) in V trifft. Trifft nun $u(DU)$ g in L, und trifft $v(AV)$ g in M, so ist $ABCDLM$ ein Pascal'sches Sechsecksechsseit. Ein Kegelschnitt des Büschels $(ABCD)$ — durch die Grundpuncte kann ein solcher passend bezeichnet werden — geht durch L und M. Verändert man p in $p_1 p_2 ..$, so gehen L und M in $L_1 L_2 ..$, $M_1 M_2 ..$ über und es ist $LL_1 L_2 .. \barwedge MM_1 M_2 ..$ Fällt L in der Reihe der Puncte $L_1 L_2 ..$ auf M, so fällt M in der entsprechenden Reihe $M_1 M_2 ..$ auf L, weil durch fünf Puncte ein Kegelschnitt vollständig bestimmt ist. Die Curvenschnittpuncte $LM \,.\, L_1 M_1 \,.\, L_2 M_2 ..$ sind in Involution, w. z. b. w. Der zweite Theil des ausgesprochenen Satzes bedarf wegen des Princips der Dualität keines Beweises.

Die Curven eines Büschels bestimmen auf zwei Geraden durch einen Grundpunct oder durch zwei Grundpuncte projective Reihen.

Legt man (Fig. 56, Taf. XIII) durch den Grundpunct B eine Gerade g, welche die Curven $KK'K'' ..$ des Büschels in $XX'X'' ..$ trifft, und sind $tt't'' ..$ die Tangenten an diese Curven in A, so ist $tt't'' .. \barwedge XX'X'' ..$ Es sei AY die Tangente an K, so bilden $AABXCD$ ein Pascal'sches Sechsecksechsseit, wenn X auf K liegt, also schneiden sich $t(AA)$ und (CX) in Y auf der Geraden (UV), die fest bleibt, wenn K sich ändert. Die linearen Büschel $tt't'' ..$ und $C(XX'X'' ..)$ sind perspectiv, und also ist $XX'X'' .. \barwedge tt't'' ..$, w. z. b. w.

Man kann die Curven den Tangenten t in einem Grundpuncte, oder den Schnittpuncten auf einer Geraden durch einen Grundpunct projectiv zugeordnet nennen. Legt man verschiedene Gerade g durch verschiedene oder auch durch denselben Grundpunct, so sind die Schnittpuncte den Curven (den Tangenten in einem Grundpuncte), also unter sich projectiv.

Fallen zwei Grundpuncte eines Curvenbüschels in einen zusammen, so heisst das, die Curven des Büschels haben in jenem Puncte eine gemeinsame Tangente. In diesem Falle bestimmt der Büschel $(AABC)$ auf zwei Geraden gg' durch A nicht bloss projective, sondern perspective Reihen. Die Curven $KK'K'' ..$ treffen g in Puncten $XX'X'' ..$ die von A verschieden sind, und nur die in das Geradenpaar $(AB)(AC)$ zerfallende Curve trifft g nur einmal in A. Dieselbe zerfallende Curve trifft auch g' nur in dem einen Puncte. Dieser ist also ein sich selbst entsprechender, die Gebilde auf gg' sind perspectiv.

Wir benutzen den Curvenbüschel $(AABC)$ zum Beweise des folgenden Satzes: Ist $AUU'U'' .. \barwedge AVV'V'' ..$ und ist $AUVX$

$\barwedge AU'V'X' \barwedge AU''V''X'' \barwedge \ldots$, so ist auch $AUU'U''\ldots \barwedge AXX'X''\ldots \barwedge AVV'V''\ldots$ und die drei Punctreihen haben gemeinsame sich selbst entsprechende Puncte, sind also perspectiv.

Wir legen durch A eine Gerade g und bestimmen auf ihr drei Puncte UVX so, dass $AUVX$ dem Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv ist. Durch die Puncte UVX ist je eine Curve des Büschels $(AABC)$ bestimmt, es seien die Curven $K_u K_v K_x$. Diese Curven werden von den durch A gehenden Geraden $g'g''\ldots$ bez. in den Puncten $U'V'X'$, $U''V''X''$, .. getroffen. Von B projiciren wir $AUVX$, $AU'V'X'\ldots$ durch $auvx$, $au'v'x'\ldots$, so ist $auvx \barwedge au'v'x' \barwedge au''v''x'' \barwedge \ldots \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$. Aber nach Seite 36 ist $gg'g''\ldots \barwedge uu'u''\ldots \barwedge vv'v'' \barwedge xx'x''\ldots$ Ist nun umgekehrt in einem linearen Strahlbüschel B $auvx \barwedge au'v'x' \barwedge au''v''x'' \barwedge \ldots \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ und ist $auu'u''\ldots \barwedge avv'v''\ldots$, so ist auch $auu'u''\ldots \barwedge axx'x''\ldots$ Zum Beweise nehmen wir auf a einen Punct A und in ihm eine Gerade t. Auf dem zweiten sich selbst entsprechenden Strahl der projectiven Reihen $auu'\ldots$, $avv'\ldots$ nehmen wir noch einen Punct C an, und fassen nun den Kegelschnittbüschel $(AABC)$, in dem t gemeinsame Tangente ist, ins Auge. Auf einer Geraden g durch A bestimmen wir die Puncte $AUVX \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ als die Schnittpuncte von g mit $auvx$. Durch diese Puncte legen wir die Curven $K_u K_v K_x$ des Büschels $(AABC)$. AC werde mit h, (BC), der zweite Doppelstrahl der projectiven Reihen $auu'\ldots \barwedge avv'\ldots$, werde mit k bezeichnet. Nehmen wir nun $htgg'g''\ldots \barwedge kauu'u''\ldots$ an, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen auf K_u. Da $kauu'\ldots \barwedge kavv'\ldots$ ist, so ist $htgg'g''\ldots \barwedge kavv'v''\ldots$ und die entsprechenden Strahlen treffen sich in der Curve K_v des Büschels $(AABC)$. Treffen die Geraden $gg'g''\ldots$ den Kegelschnitt K_x des Büschels in $XX'X''\ldots$, so ist $AUVX \barwedge AU'V'X' \barwedge \ldots \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ und also ist $auvx \barwedge au'v'x' \barwedge \ldots \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$. Da sich aber die Strahlen $tgg'g''\ldots$, $axx'x''\ldots$ bez. auf K_x schneiden, so ist $tgg'g''\ldots \barwedge axx'x''\ldots \barwedge auu'u''\ldots$ und k ist der zweite in den letzteren projectiven Gebilden sich selbst entsprechende Strahl. Der oben ausgesprochene Satz ist demnach für Strahlenbüschel erwiesen, gilt aber natürlich ebenso für Punctreihen.

Den allgemeinen Satz zu erweisen: ist $UU'U''\ldots \barwedge VV'V''\ldots \barwedge WW'W''\ldots$, und sind den drei Projectivitäten zwei Puncte entsprechend gemein, und ist $UVWX \barwedge U'V'W'X' \barwedge U''V''W''X'' \barwedge \ldots$, so ist auch $UU'U''\ldots \barwedge XX'X''\ldots$, kann man sich in ähnlicher Weise des Kegelschnittbüschels $ABCD$ bedienen. Man greift zu diesem Zwecke aus dem Büschel $(ABCD)$ vier Kegelschnitte heraus $K_u K_v K_w K_x$, die dem Wurfe $UVWX \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$ projectiv sind, legt durch A die Geraden $gg'g''\ldots$ die die vier Kegelschnitte bez. in

$UVWX$, $U'V'W'X'$, $U''V''W''X''$.. treffen. Die Geraden uu'.. (BU, BU'..) sind $\overline{\wedge}$ $gg'g''$.., vv'.. (BV, BV'..) sind $\overline{\wedge}$ $gg'g''$.., die Geraden $ww'w''$.. (BW, BW', BW''..) sind $\overline{\wedge}$ $gg'g''$.., wenn UVW, $U'V'W'$.. die Curven $K_u K_v K_w$ durchlaufen. Wird nun $UVWX$, $U'V'W'X'$.. der Bedingung gemäss dem Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv zu sein, bestimmt, so durchlaufen XX'.. die Curve K_x des Büschels, und es ist $xx'x''$.. (BX, BX', BX''..) $\overline{\wedge}$ $gg'g''$.., und folglich $uu'u''$.. $\overline{\wedge}$ $xx'x''$.., w. z. b. w. Ist K_w die in $(AC)(BD)$ zerfallende Curve, so erhält man den oben bewiesenen speciellen Fall wieder.

Ist G ein Punct auf einer gemeinsamen Tangente a einer Kegelschnittschaar ($abcd$) und ist G' ein Punct auf derselben oder einer andern gemeinsamen Tangente derselben Schaar, so bilden die von G und G' an die Curven der Schaar gezogenen Tangenten projective lineare Strahlenbüschel, die auch den Punctreihen, die von den Stützpuncten der Curven der Schaar auf einer gemeinsamen Tangente bestimmt werden, projectiv sind. Die Curven der Schaar selbst können den Stützpuncten auf einer gemeinsamen Tangente, oder dem Tangentenbüschel in G projectiv genannt werden. — Diese Sätze als dualistische zu den vorigen bedürfen keiner weiteren Erörterung.

Ein Kegelschnittbüschel mit zwei realen und zwei aggregirt idealen Grundpuncten lässt eine besondere Erzeugungsart zu, die zu Sätzen über die sich selbst entsprechenden Elemente projectiver Verwandtschaften führt (Fig. 57, Taf. XIII).

Auf einer Geraden s liegen zwei projective Punctreihen ABC.., $A'B'C'$.. Projicirt man die Reihe ABC.. von einem Puncte P_1 durch den Strahlenbüschel $P_1(ABC..)$, die zweite von einem Puncte X der Geraden g, welche s in L' schneidet, durch den Büschel $X(A'B'C'..)$, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen dieser Büschel in einem Kegelschnitte K_x. Lässt man X auf der Geraden g laufen, so erhält man eine Reihe von Kegelschnitten, welche durch zwei feste Puncte gehen, nämlich durch P_1 und den Punct P_2 auf g, welcher durch den Strahl P_1L bestimmt wird, wenn L der dem Puncte L' der Reihe $A'B'C'$.. entsprechende Punct der Reihe ABC.. ist. Besitzen die projectiven Punctreihen reale sich selbst entsprechende Puncte, etwa P_3P_4, so ist es selbstverständlich, dass auch diese auf dem Kegelschnitt K_x liegen, und dass die Reihe einen Büschel mit den Grundpuncten $P_1P_2P_3P_4$ bildet. Giebt es aber keine realen sich selbst entsprechenden Puncte, so ist es vom Standpunct der reinen Geometrie nicht ohne Weiteres klar, dass die Kegelschnittreihe einen Büschel bildet, für den die Gerade s eine allen Individuen

des Büschels gemeinsame, die Curven ideal treffende Sehne ist, die mit der P_1P_2 verbindenden Geraden s' zusammen ein Paar bildet. Es lässt sich dies aber wie folgt erweisen:

Dem Puncte T der Reihe $ABC..$ entspreche der Punct T' der Reihe $A'B'C'..$, als Punct der ersten Reihe werde T' mit S bezeichnet, und ihm entspreche in der zweiten Reihe der Punct S'. Die Puncte S und T' fallen also zusammen. Die Strahlen P_1S und XS' schneiden sich in U auf K_x, P_1T und $XT'(XS)$ in V auf K_x, P_1V und XU schneiden sich in Q, P_1X und UV in R, QR gehe durch den Punct Σ auf s. Dann sind die Strahlen $Q\Sigma R$, QUS', QS, QVT und also die Puncte $\Sigma S'ST$ harmonische, nach bekannten Sätzen über das eingeschriebene Viereck. Die Polare von S in Bezug auf K_x ist QR und also sind $S\Sigma$ für diesen Kegelschnitt conjugirte Puncte. Aendert man die Lage von X auf g, so bleiben TSS' fest und also bleibt auch Σ fest als vierter harmonischer Punct zu den dreien. $S\Sigma$ sind deshalb für alle Kegelschnitte K_x conjugirte Puncte. Da S auf s willkürlich gewählt wurde, so folgt daraus, dass auf s ein Paar von Puncten, die für einen Kegelschnitt K_x conjugirt sind, es für alle Kegelschnitte der Reihe sind, dass s eine ideal schneidende gemeinsame, eine Doppelsehne der Reihe ist. Eine zweite gemeinsame Sehne ist s', und da sich ss' nicht in einem gemeinsamen Puncte der Curven K_x schneiden, so bilden sie ein Paar, die Kegelschnitte bilden einen Büschel durch die realen Puncte P_1P_2 und die idealen Doppelpuncte der Involution $S\Sigma$ auf s, die als die idealen sich selbst entsprechenden Puncte der Verwandtschaft $ABC.. \barwedge A'B'C'..$ anzusehen sind. — Hieraus schliesst man noch, dass man eine Punctinvolution erhält, wenn man in zwei projectiven Reihen auf einer Geraden zu einem Puncte S als Punct der ersten Reihe den entsprechenden Punct S' der zweiten Reihe bestimmt, dann zum Puncte S als Punct der zweiten Reihe den entsprechenden Punct T der ersten Reihe, und endlich den Punct Σ so bestimmt, dass $TSS'\Sigma$ vier harmonische Puncte sind. S und Σ bilden ein Paar der Involution, und diese ist durch die gegebene Projectivität völlig bestimmt. Man erhält so eine bestimmte Involution, deren Doppelpuncte die sich selbst entsprechenden Puncte der Verwandtschaft $ABC.. \barwedge A'B'C'..$ sind, gleichviel ob diese real oder ideal sind.

Projicirt man von zwei Puncten P_1P_2 einer Curve K zweiter Ordnung die Puncte dieser Curve auf eine Gerade g, dann von zwei andern Puncten $P'_1P'_2$ aus, so erhält man auf g zwei verschiedene projective Punctreihenpaare, etwa $ABC.. \barwedge A'B'C'..$

und $ABC.. \barwedge A''B''C''..$, aber die Involution, die die doppelten Puncte dieser Projectivitäten bestimmt, ist bei beiden dieselbe, nämlich die Involution der für K conjugirten Puncte auf g. Man vergleiche Segre: Le coppie di elementi imaginari etc. Torino Mem. 1886.

Hier mögen einige Sätze über Involutionen eingeschoben werden. — Legt man eine Punctinvolution auf eine Curve zweiter Ordnung K, so liegt das Involutionscentrum G ausserhalb, wenn die Involution reale Doppelpuncte hat. Jede Gerade durch G bestimmt ein Paar der Involution, es sind die Doppelpuncte der Involution conjugirter Puncte auf der Secante. Da G ausserhalb K liegt, so giebt es Secanten, die die Curve in idealen Puncten treffen. Eine hyperbolische Involution besitzt demnach Paare, die aggregirt ideale sind, wir nennen sie wie die realen Paare von den Doppelpuncten harmonisch getrennte Puncte. — Ist die Involution auf K elliptisch, so liegt G innerhalb K, jede Gerade durch G trifft die Curve in realen Puncten. Eine elliptische Involution besitzt demnach keine aggregirt idealen Elementenpaare. Hier entsteht die Frage, wann bilden die beiden Doppelpuncte einer elliptischen Involution ein Paar einer hyperbolischen Involution, oder wann ist ein Paar aggregirt idealer Puncte von einem Paare realer Puncte harmonisch getrennt? Nimmt man die beiden Involutionen als Punctinvolutionen auf einer Curve zweiter Ordnung an, — jede Involution lässt sich eindeutig auf eine krumme Punctinvolution beziehen, sodass die Allgemeinheit durch diese Annahme nicht beschränkt wird — so enthält die Involutionsachse e der elliptischen Involution die beiden idealen Doppelpunkte derselben, sollen diese ein Paar der hyperbolischen Involution sein, so muss das Involutionscentrum H der letzteren auf der Involutionsachse e liegen, woraus weiter folgt, dass das Involutionscentrum E der elliptischen Involution auf der Involutionsachse h der hyperbolischen Involution liegen muss, weil Involutionscentrum und Achse Pol und Polare von einander sind. Es müssen folglich die Doppelpuncte der hyperbolischen Involution ein Paar der elliptischen Involution sein; dies ist die gesuchte Bedingung.

Das gemeinsame Paar zweier elliptischen Involutionen bildet die Doppelpuncte der hyperbolischen Involution, in der die idealen Doppelpuncte der beiden elliptischen Involutionen ideale Paare sind, oder zwei Paare idealer Puncte bestimmen eine hyperbolische Involution, die idealen Paare sind von den Doppelpuncten der hyperbolischen Involution gleichzeitig harmonisch getrennt. Zwei aggregirt ideale und zwei reale Puncte bestimmen eine hyper-

bolische Involution, von der sie Paare sind, definirt man nämlich die beiden Punctpaare als Doppelpunkte von Involutionen, so giebt das gemeinsame Paar die Doppelpuncte der Involution, in der jene beiden Elementenpaare je ein Paar sind.

Aufgabe. Von einer Involution sind zwei Paare gegeben, von denen eins oder beide ideal sind, man soll zu einem weiteren Puncte den zugeordneten der Involution finden. — Man suche nach den oben gegebenen Sätzen die immer realen Doppelpuncte der durch die beiden Paare gegebenen Involution, der durch diese von dem weiter gegebenen Puncte harmonisch getrennte ist der gesuchte. Ein weiter gegebenes Element kann nicht ideal sein, weil ein solches das aggregirte Element immer von selbst mit bestimmt, und es kann sich nur um die leicht zu entscheidende Frage handeln, ob ein weiter gegebenes Paar aggregirt idealer Elemente zu der durch die beiden ersten Paare gegebenen Involution gehört oder nicht.

Sind $\lambda\lambda\,.\,\mu\mu\,.\,\alpha\xi\,.\,\beta\eta,\ \lambda'\lambda'\,.\,\mu'\mu'\,.\,\alpha\xi'\,.\,\beta\eta',\ \lambda''\lambda''\,.\,\mu''\mu''\,.\,\alpha\xi''\,.\,\beta\eta'',\ldots$ *Involutionen, auf demselben Träger, so ist* $\xi\xi'\xi''\ldots \barwedge \eta\eta'\eta''\ldots$

Wir nehmen die Involutionen als Puncte $LML'M'ABXYX'Y'\ldots$ einer Curve K zweiter Ordnung an (Fig. 58, Taf. XIII). Die Geraden $pp'p''\ldots$ durch einen Punct G mögen K bez. in LM, $L'M'$, $L''M''$,.. treffen, AB sind zwei Puncte auf K. Die Involutionen

$$LL\,.\,MM\,.\,AX\,.\,BY,\ L'L'\,.\,M'M'\,.\,AX'\,.\,BY',\ L''L''\,.\,M''M''\,.\,AX''\,.\,BY'',\ldots$$

sollen die Punkte $PP'P''\ldots$ zu Involutionscentren haben, sie liegen als Pole von Geraden durch G auf einer Geraden g. Die Büschel $A(PP'P''\ldots)$ $B(PP'P''\ldots)$ sind perspectiv, also ist $XX'X''\ldots \barwedge YY'Y''\ldots$ w. z. b. w. In der Figur sind die Tangenten in LM, $L'M'$, zur Auffindung der Pole PP' benutzt, was natürlich auch anders geschehen kann. Vorausgesetzt ist, dass $\lambda\mu\,.\,\lambda'\mu'\ldots$ in Involution sind.

Sind die Punctreihen $ALBM$, $AL'B'M'$ auf verschiedenen Trägern harmonisch, und sind LM, $L'M'$ ideale Paare, so liegen die beiden Gebilde einander doppelt perspectiv, wie im Falle realer Puncte. Die aggregirt idealen Geraden (LM) $(L'M')$ schneiden sich in einem realen Puncte Q, (LM') $(L'M)$ schneiden sich in Q'. Die Puncte QQ' liegen nach S. 87 auf der Verbindungslinie BB', weil diese Puncte A gepaart sind. Daraus folgt die doppelt perspective Lage. Die entstehende Figur ist ein Viereck mit zwei realen und zwei Paar idealen Seiten und drei realen Nebenecken.

Wir gehen nun dazu, ein Kegelschnittbüschel zu construiren durch vier Puncte, gleichviel ob darunter ideale sind oder nicht, oder ob alle vier ideale sind (Fig. 59, Taf. XIII).

Liegen auf zwei sich im Puncte P schneidenden Geraden $s's''$ die Involutionen bez. $A'\mathfrak{A}'.B'\mathfrak{B}'..$, $A''\mathfrak{A}''.B''\mathfrak{B}''..$ und sind P in ihnen bez. $Q'Q''$ gepaart, und bestimmt $(A'A'')$ auf p $(Q'Q'')$ den Punct A, die Verbindungslinie $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ auf p den Punct $\mathfrak{A}$, so erzeugen die projectiven Büschel $A(A'B'C'..)$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'..)$ eine Curve zweiter Ordnung, zu der $s's''$ gehören. — Man ziehe die Geraden $AA'A''$, $AA'_1A''_1$, $AA'_2A''_2..$, so sind die Punctreihen $A'A'_1A'_2..$ auf s' und $A''A''_1A''_2..$ auf s'' perspectiv, und es ist

$$A'A'_1A'_2.. \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2.., \quad A''A''_1A''_2.. \barwedge \mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2..,$$

wenn die deutschen Buchstaben die den lateinischen in den Involutionen gepaarten Puncte bedeuten, und es ist mithin $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2.. \barwedge \mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2..$ Fällt A' auf Q' also A'' auf Q'', so fallen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ auf P, der Punct ist sich selbst entsprechend, und es ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2.. \overline{\barwedge} \mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2..$ Die beiden Büschel $A(A'A'_1A'_2..)$ $\barwedge \mathfrak{A}(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2..)$ erzeugen eine Curve zweiter Ordnung K, zu der nach Seite 80 s' gehört. Da aber $A(A'A'_1A'_2..)$ identisch $A(A''A''_1A''_2..)$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}'_2..)$ identisch $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2..)$ ist, so gehört auch die Involution s'' zur Curve. Also $s's''$ gehören zu K. Da A auf p willkürlich genommen werden kann, so erhält man eine unendliche Reihe von Curven zweiter Ordnung, zu denen die Involutionen $s's''$ gehören.

Ist von den Involutionen $s's''$ wenigstens eine elliptisch, so liegt P ausserhalb, jede Curve, zu der $s's''$ gehören, trifft p. Lässt man also A die ganze Gerade p durchlaufen, so erhält man den ganzen Büschel von Curven, zu denen $s's''$ gehören, für die $s's''$ Doppelsehnen sind. Sind aber beide Involutionen hyperbolisch, so giebt es auch Curven im Büschel, für die $(s's'')$ innerhalb liegt, es giebt auch Curven des Büschels, die p nicht treffen, man erhält dann durch Variation von A nicht den ganzen Kegelschnittbüschel. Für diesen Fall, der Fall vier realer Grundpuncte, ist aber der ganze Büschel bereits früher construirt. — Die Gerade p ist die Polare von P für alle Kegelschnitte des Büschels.

Ist der Punct A auf p gegeben, so ist durch ihn eine Curve K des Büschels $[s's'']$ durch die gegebene Construktion bestimmt, eine Curve die durch A geht.*) Der zweite Schnittpunct von K und p sei $\mathfrak{A}$, so müssen die Büschel $A(K)$ und $\mathfrak{A}(K)$, ich meine die in A und $\mathfrak{A}$ liegenden linearen Büschel, die die Puncte von K projiciren, die Paare der Involution auf s' und die Paare der Involution auf s'' projiciren. Der Punct $\mathfrak{A}$ ist aber, wenn A ge-

*) Die eckigen Klammern bedeuten den Büschel, die runden den Schnittpunct der Involutionsträger.

geben ist, durch diese Eigenschaft völlig bestimmt, und es giebt deshalb nur eine Curve K durch A zu der $s's''$ zugehörige Involutionen sind. Fällt A auf $(s'p)$, so ergiebt sich das Geradenpaar $s's''$ als eine (ausgeartete) Curve des Büschels.

Die Puncte AA_1A_2.. auf p und die zugehörigen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$.. auf p, also die Schnittpuncte der Curven des Büschels mit p bilden eine Involution.

Legt man nämlich durch die Puncte AA_1A_2.. auf p und durch A' auf s' den linearen Büschel $A'(AA_1A_2..)$, und trifft derselbe s'' in $A''A''_1A''_2$.., so sind die Puncte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$.. durch die Strahlen des Büschels $\mathfrak{A}'(\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2..)$ bestimmt. Nun ist aber $\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}''_2.. \barwedge A''A''_1A''_2..$, und also ist $AA_1A_2.. \barwedge \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$.. Fällt A'' auf P, so fällt $\mathfrak{A}''$ auf Q'', A auf Q', $\mathfrak{A}$ auf Q'', fällt A'' auf Q'', so fällt A auf Q'', $\mathfrak{A}$ auf Q', $Q'Q''$ bilden in der Reihe der A und $\mathfrak{A}$ ein Paar, die Reihen $Q'Q''. A\mathfrak{A} . A_1\mathfrak{A}_1 . A_2\mathfrak{A}_2$.. sind in Involution. Man erhält so den bemerkenswerthen Satz: Legt man durch die auf $s's''$ willkürlichen Puncte $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$.. gerade Linien, die p in ABC.. treffen, und legt man durch die $A'A''$,.. in den Involutionen $s's''$ gepaarten Puncte $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}''$.. gerade Linien, die p in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.. treffen, so erzeugen diese Geraden auf p eine Involution $A\mathfrak{A} . B\mathfrak{B} . C\mathfrak{C}$..

Legt man durch die Puncte $A'A''$ auf $s's''$ und die ihnen gepaarten $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ einen Kegelschnittbüschel, so bestimmen die Kegelschnitte des Büschels nach Seite 107 auf p eine Involution, sie ist, weil sie die Paare $A\mathfrak{A}$, $Q'Q''$ enthält, mit der eben besprochenen identisch. Hieraus folgt, dass irgend drei Paare der Involutionen auf $s's''p$ ein Pascal'sches Sechsecksechsseit bilden.

Die Curven des Büschels, dessen Grundpuncte die realen oder idealen Doppelpuncte der Involutionen $s's''$ sind, bestimmen auf einer Geraden g eine Involution. Man nennt dies die charakteristische Eigenschaft des Büschels. — Für die Gerade p ist der Satz erwiesen. (Fig. 60, Taf. XIII). Auf ihr sei $C\mathfrak{C}$ ein Paar, mit diesen Puncten erzeugen wir durch Projection der Involutionen $s's''$ in der eben beschriebenen Weise einen Kegelschnitt K des Büschels. Die Gerade g bestimme auf $ps's''$ die Puncte $AA'A''$, und $\mathfrak{g}$ gehe durch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, welche Puncte in der oben angegebenen Weise von $AA'A''$ abhängen. Die Curve K werde von g in H und I getroffen. Dann schneiden sich $(CA')(\mathfrak{C}\mathfrak{A}')$, $(CA'')(\mathfrak{C}\mathfrak{A}'')$ in U und V auf K, und es geht die Gerade $h(UV)$ durch den Punct $S(g\mathfrak{g})$, weil $CA'A''\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$ ein Pascal'sches Sechsecksechsseit bilden. Also ist $C(\mathfrak{C}UHI) \barwedge V(\mathfrak{C}UHI) \barwedge V(UCIH)$

$$AA'HI \barwedge SA''IH.$$

Es sind die Puncte $HI \,.\, AS \,.\, A'A''$ in Involution. Lässt man $C\mathfrak{C}$ in ein anderes Paar $C'\mathfrak{C}'$, K in K' übergehen, so bleiben AS, $A'A''$ fest, also gehören die neuen Schnittpuncte $H'I'$ zu derselben Involution, die Curven bestimmen auf g eine Involution, zu der die Puncte $(gs')(gs'')$ als ein Paar gehören, w. z. b. w.

Nachzuweisen, dass auch die idealen Schnittpuncte der Curven, wenn diese nicht alle g treffen, zu dieser Involution gehören, mag dem Leser als Aufgabe überlassen bleiben.

Die Aufgabe, eine Curve zweiter Ordnung zu zeichnen, zu der zwei Involutionen $s's''$ zugehörige sind, oder die durch vier reale oder ideale Puncte geht und eine Gerade g berührt, läuft darauf hinaus, die Doppelpuncte der Involution zu finden, die der Büschel $[s's'']$ auf g bestimmt. Jeder dieser Puncte, falls sie reale sind, löst als fünfter Punct der gesuchten Curve die Aufgabe. Hat die Involution auf g keine Doppelpuncte, so ist die Aufgabe nicht lösbar. Ist g die uneigentliche Gerade, so findet man auf diesem Wege die Parabeln des Büschels $[s's'']$. Ob der Büschel einen Kreis enthält, ist nach Seite 99 zu entscheiden.*) Liegen die vier realen Grundpuncte eines Kegelschnittbüschels der Art, dass aus dreien ein Dreieck so gebildet werden kann, dass der vierte Punct im Innern desselben liegt (in dem durch die drei Seiten begrenzten Stücke, das keinen uneigentlichen Punct enthält, im Grunde theilen drei gerade Linien die Ebene in vier begrenzte Felder oder Dreiecke), so sind alle Curven des Büschels Hyperbeln.

Sind in den Puncten $S'S''$ auf einer Geraden p zwei Strahleninvolutionen $a'\mathfrak{a}'.\, b'\mathfrak{b}'.\, c'\mathfrak{c}'..$, $a''\mathfrak{a}''.\, b''\mathfrak{b}''.\, c''\mathfrak{c}''..$ gegeben, und sind $q'q''$ die p in diesen Involutionen gepaarten Strahlen, so ist der Schnittpunct P von $q'q''$ ein Punct, der der Pol von p ist für alle Curven einer Schaar, für die $S'S''$ zugehörig sind, die die realen oder idealen Doppelstrahlen von $S'S''$ zu gemeinsamen Tangenten haben. Wegen des Princips der Dualität genügt es die Sätze über Schaaren ohne Beweis auszusprechen. Die Schnittpuncte $(a'a'')(b'b'')..$ und $(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'')(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'')..$ bestimmen mit P Strahlen $a\mathfrak{a}.b\mathfrak{b}.c\mathfrak{c}..$, die in Involution sind. Auf $a\mathfrak{a}$ bestimmen die Strahlen $a'\mathfrak{a}'$, $b'\mathfrak{b}'..$ oder auch $a''\mathfrak{a}''$, $b''\mathfrak{b}''..$ Punctreihen, deren Verbindungslinien eine Curve K zur Stützcurve haben, zu der die Involutionen $S'S''$ gehört, und für die $a\mathfrak{a}$ Tangenten sind. Ersetzt man a durch $bc..$ so erhält man, wenn wenigstens eine der Involutionen elliptisch

*) Schröter giebt in seiner Theorie der Kegelschnitte Seite 270 hierfür eine andere Bedingung an, die aber nicht linear ist.

ist, alle Curven der Schaar, sind beide hyperbolisch, so kennt man bereits die ganze Schaar von Curven, die vier gemeinsame reale Tangenten haben.

Die Schaar von Kegelschnitten, die zwei Paare von $S'S''$ zu Tangenten haben, etwa $a'\mathfrak{a}'$, $a''\mathfrak{a}''$, bestimmen in P eine Strahleninvolution, die mit der Involution $a\mathfrak{a}\,.\,b\mathfrak{b}\,.\,c\mathfrak{c}\,.\,.$ identisch ist. Daraus folgt: Drei Paare $a\mathfrak{a}$, $a'\mathfrak{a}'$, $a''\mathfrak{a}''$ der Involutionen in $PS'S''$ bilden ein Brianchon'sches Sechsseitsechseck, und speciell: schneiden sich $aa'a''$ in einem Puncte, so schneiden sich auch $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ in einem Puncte.

Die Tangentenpaare von irgend einem Puncte an die Curven der Schaar $[S'S'']$ bilden eine Involution, man nennt dies die charakteristische Eigenschaft der Schaar.

Die Aufgabe durch vier reale oder ideale Tangenten eine Curve zweiter Ordnung zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punct geht, kommt darauf hinaus, in der Involution die die Curven einer Schaar in diesem Puncte bestimmen, die sich selbst entsprechenden Strahlen zu finden.

Erzeugt man durch die Strahleninvolutionen $PS'S''$, die in der besprochenen Beziehung zu einander stehen, auf einer durch sie gehenden Curve zweiter Ordnung K drei (krumme) Punctinvolutionen, — wir wollen sie kurz als Involutionen $PS'S''$ bezeichnen — so liegen die drei Involutionscentren $\Pi\Sigma'\Sigma''$ auf einer Geraden.

Denn ist (Fig. 61, Taf. XIV) Q ein Punct auf K, so müssen die drei Strahlen, die den Strahlen $(QP)(QS')(QS'')$ in den Involutionen $PS'S''$ gepaart sind, sich in einem Puncte $\mathfrak{Q}$ schneiden, wie sechs Zeilen weiter oben bemerkt wurde. Schneiden die Geraden $(P\mathfrak{Q})(S'\mathfrak{Q})(S''\mathfrak{Q})$ die Curve K bez. in $\mathfrak{P}\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''$, so sind $(PQ)(P\mathfrak{P})$, $(PS')(PS'')$ zwei Paare der Involution in P, und $(Q\mathfrak{P})$ $(S'S'')$ bestimmen das Centrum Π der krummen Involution P. Ebenso geben $(Q\mathfrak{S}')(S''P)$ das Centrum Σ' der krummen Involution S' und $(Q\mathfrak{S}'')(PS')$ geben das Centrum Σ'' der krummen Involution S''. Das Sechsecksechsseit $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{S}'S'S''P$ ist ein Pascal'sches, also liegen $\Pi\Sigma'\mathfrak{Q}$ in einer Geraden. Das Pascal'sche Sechsecksechsseit $\mathfrak{S}'\mathfrak{Q}\mathfrak{S}''S'PS''$ lehrt, dass $\Sigma'\Sigma''\mathfrak{Q}$ in einer Geraden liegen, folglich liegen die Puncte $\Pi\Sigma'\Sigma''$ in einer Geraden, w. z. b. w. Die drei Involutionsachsen $\pi\sigma'\sigma''$ gehen dem entsprechend durch einen Punct.

Hieraus folgt der Satz: Ist (Fig. 62, Taf. XIV) ein Kegelschnitt K einem Dreieck eingeschrieben, und trifft eine Gerade g die Seiten (BC) in $\mathfrak{A}$, (CA) in $\mathfrak{B}$, (AB) in $\mathfrak{C}$, und legt man durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ drei Strahlen uvw, welche die Curve K bez. in UU', VV', WW' treffen, so stützen sich die sechs Geraden $(AU)(AU')(BV)$ $(BV')(CW)(CW')$ auf einen neuen Kegelschnitt. Denn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$

können als Involutionscentren von Involutionen auf K angesehen werden, die, von ABC projicirt, Strahleninvolutionen von der Eigenschaft wie PSS' liefern. Irgend drei Paare der Involutionen in ABC also $(AU)(AU')$.., (CW') bilden ein Brianchon'sches Sechsseitsechseck, wie auf Seite 116 bewiesen wurde.

Mit Hülfe der eben gewonnenen Resultate lässt sich ein Lehrsatz erweitern, der auf Seite 65 für einen Kegelschnitt und ein Geradenpaar erwiesen wurde, zu dem Satze*): *Die Geraden, welche zwei Curven zweiter Ordnung in harmonischen Puncten treffen, stützen sich auf einen Kegelschnitt.*

Die Polare a eines Punctes A auf K in Bezug auf K' trifft K in zwei Puncten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ sind dem Puncte A auf K in Bezug auf K' conjugirt. Läuft A auf K, so erzeugen die Geraden $(A\mathfrak{A})(A\mathfrak{A}')$ zwei Strahlenreihen, es mögen so zu den Puncten ABC.. auf K die Polaren abc.. (für K') und deren Schnittpuncte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$.. mit K gehören. Dann stützen sich die sechs Geraden $(A\mathfrak{A})(A\mathfrak{A}')(B\mathfrak{B})(B\mathfrak{B}')(C\mathfrak{C})(C\mathfrak{C}')$ auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Denn die Dreiecke ABC und abc liegen perspectiv, und es liegen die Schnittpuncte α der Geraden (BC) und a, β der Geraden (CA) und b, γ der Geraden (AB) und c auf einer Geraden, so dass der eben bewiesene Satz gilt. Zu $\mathfrak{A}$ construiren wir (in Bezug auf K') die Polare, sie treffe K ausser in A noch in $\mathfrak{A}''$, dann sind wieder $(\mathfrak{A}A)(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'')(B\mathfrak{B})(B\mathfrak{B}')(C\mathfrak{C})(C\mathfrak{C}')$ sechs Tangenten eines Kegelschnitts, welcher mit $\mathfrak{K}$ identisch sein muss, weil fünf Tangenten dieselben sind. Lassen wir nun C in D übergehen, so hat der zugehörige Kegelschnitt mit $\mathfrak{K}$ die fünf Tangenten $(A\mathfrak{A})(A\mathfrak{A}')(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'')(B\mathfrak{B})(B\mathfrak{B}')$ gemein, er ist also selbst wieder $\mathfrak{K}$. Also stützen sich die Geraden $(A\mathfrak{A})(A\mathfrak{A}')$, wenn A auf K läuft, sämmtlich auf einen und denselben Kegelschnitt. Die Puncte $A\mathfrak{A}$ sind aber durch K' harmonisch getrennt, die Geraden $A\mathfrak{A}$ schneiden die Kegelschnitte KK' in harmonischen Puncten. Unter diesen Geraden befinden sich (siehe Seite 49) die Tangenten in den gemeinsamen Puncten der Kegelschnitte. — Damit ist unser Satz bewiesen.

Dualistisch hierzu ist der Satz: *Die Puncte, von denen vier harmonische Tangenten an zwei Curven zweiter Ordnung gezogen werden können, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, unter ihnen befinden sich die Berührungspuncte der gemeinsamen Tangenten an die beiden Kegelschnitte.*

---

*) In der analytischen Geometrie nennt man diesen Kegelschnitt die harmonische Covariante der beiden gegebenen. Die hier gegebene geometrische Darstellung ist Schröters Theorie der Kegelschnitte entlehnt.

Auf einer Geraden a durch einen Punct A sind die A für die Kegelschnitte des Büschels [s's''] conjugirten Puncte den Puncten projectiv, die einem Puncte B auf einer Geraden b für denselben Büschel conjugirt sind. Man kann sagen, die einem Puncte A auf einer durch ihn gehenden Geraden a für einen Kegelschnittbüschel conjugirten Puncte sind dem Kegelschnittbüschel projectiv.

Wir beweisen den Satz von speciellen Fällen zum allgemeinen fortschreitend. Die Gerade (AB) werde mit c bezeichnet. Die Schnittpuncte der Curven $KK'K''$.. des Büschels $[s's'']$ seien bez. LM, $L'M'$, $L''M''$.., die Schnittpuncte der Polaren von A mit c, also die A auf c für die Curven des Büschels conjugirten Puncte seien $X_c X'_c X''_c$.., die B auf c conjugirten Puncte seien $Y_c Y'_c Y''_c$.. So folgt aus den Involutionen (siehe Seite 112)

$$LL \,.\, MM \,.\, AX_c \,.\, BY_c,\ L'L' \,.\, M'M' \,.\, AX'_c \,.\, BY'_c, ..$$

für KK'.. conjugirter Puncte auf c, dass $X_c X'_c X''_c .. \;\overline{\wedge}\; Y_c Y'_c Y''_c$.. ist. Also die auf der Geraden (AB) oder c den Puncten A und B für den Büschel $[s's'']$ conjugirten Puncte bilden projective Reihen. Dies ist ein specieller Fall des allgemeinen Satzes, dabei dürfen A und B nicht Grundpuncte des Büschels sein, weil diese nur sich selbst conjugirt sind.

Der Punct $(s's'')$ werde wie vorhin mit P, seine Polare mit p bezeichnet. Ist C ein Punct auf p, so gehen die Polaren von C für alle Curven des Büschels durch P, sie bilden einen linearen Büschel. Liegen A und B auf p, so bilden die Polaren von A und B projective Strahlenbüschel, weil sie durch die A und B conjugirten Puncte gehen, die als einander projectiv eben nachgewiesen wurden. Liegt C nicht auf p, aber liegt A auf p, so sind die C auf der mit b zu bezeichnenden Geraden (AC) conjugirten Puncte den A conjugirten Puncten, folglich den Polaren von A projectiv. Liegen von den drei Puncten ABC A und B auf p, so sind die C auf $b(AC)$ conjugirten Puncte den Polaren von A, die C auf $a(BC)$ conjugirten Puncte den Polaren von B, die Polaren von A den Polaren von B projectiv, also sind die C auf a und b conjugirten Puncte unter sich projectiv. Für die Curve des Büschels, die durch C geht, ist C auf a und b sich selbst conjugirt, mithin liegen die C auf a und b conjugirten Puncte perspectiv. Daraus folgt der wichtige Satz:

Die Polaren eines Punctes für die Curven eines Büschels gehen durch einen Punct, und zu jedem Puncte giebt es im Allgemeinen einen und nur einen ihm für alle Curven des Büschels conjugirten.

Nur solche Puncte, die wie der Punct P für alle Kegelschnitte des Büschels dieselbe Polare haben, machen eine Ausnahme. Wir werden später sehen, dass es, den Fall eines Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte ausgenommen, nur drei solcher Puncte giebt. — Sind die Grundpuncte des Büschels alle real, so giebt es drei Paare von Doppelsehnen, die als ausgeartete Kegelschnitte mit im Büschel stecken. Die Polare eines Punctes für einen solchen Kegelschnitt ist die Gerade, die durch die Sehnen des Paares von dem Puncte harmonisch getrennt ist. Der eben ausgesprochene Satz auf die drei Doppelsehnenpaare angewandt, giebt den auf Seite 75 gefundenen Satz. Weiter aber lässt sich der Satz aussprechen:

Jedes Paar für den Kegelschnittbüschel, d. h. für alle Curven des Büschels conjugirter Puncte ist durch jedes etwa vorhandene Paar von Doppelsehnen, also auch durch $s's''$, harmonisch getrennt.

Wir kehren zum allgemeinen Beweise des auf voriger Seite behaupteten Satzes zurück. Da die Polaren eines Punctes C einen linearen Büschel bilden, und ihre Schnittpuncte mit einer Geraden (AC) den Polaren des Punctes A auf p projectiv sind, so sind auch die Polaren von C den Polaren von A projectiv, so dass wir den Satz erhalten: *Die Polaren irgend zweier Puncte in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel $[s's'']$ sind einander projectiv, die entsprechenden schneiden sich auf einer Curve zweiter Ordnung.* Der Satz kann nur in Frage gezogen werden, wenn A auf einen der Grundpuncte fällt, wenn die Polaren Tangenten sind. Aber auch dann ist er richtig. Die Polaren des Punctes $Q'(s'p)$ für die Kegelschnitte des Büschels treffen die Tangenten von A, wenn A ein realer Doppelpunct der Involution auf s' ist, in Puncten von p. Diese Polaren sind also den Tangenten projectiv, also sind die Tangenten den Polaren eines jeden Punctes projectiv. Damit ist der Satz allgemein bewiesen.

Legt man durch einen realen Grundpunct des Kegelschnittbüschels eine Gerade g und treffen die Curven $KK'K''$.. des Büschels diese noch in $UU'U''$.., während die Polaren eines Punctes C auf g diese Gerade in $XX'X''$.. treffen, so ist $UU'U''.. \;\overline{\wedge}\; XX'X''..$, weil beide Reihen dem Kegelschnittbüschel (den Tangenten in A) projectiv sind, folglich sind die Schnittpuncte des Kegelschnittbüschels mit einer Geraden durch einen Grundpunct den Polaren eines beliebigen Punctes für den Kegelschnittbüschel projectiv.

Die Schnittpuncte einer Geraden g durch einen Grundpunct, und einer Geraden g' durch einen andern Grundpunct mit den

Curven des Büschels sind einander perspectiv, weil offenbar der Schnittpunct der Geraden gg' sich selbst entspricht.

Für die dualistischen Sätze kann man auf Beweise verzichten, es genügt sie auszusprechen.

Die Pole einer Geraden für die Curven einer Kegelschnittschaar liegen auf einer Geraden, und zu jeder Geraden giebt es eine und nur eine ihm für alle Kegelschnitte der Schaar conjugirte. Eine Ausnahme machen nur die Geraden, die für alle Curven des Büschels denselben Pol haben, deren giebt es, wie sich später zeigt, drei.

Jedes Paar für die Schaar conjugirter Geraden ist durch die etwa vorhandenen Paare von Doppelkreuzpuncten harmonisch getrennt.

Die Pole irgend zweier Geraden ab für eine Kegelschnittschaar bilden zwei einander projective gerade Punctreihen.

Die Geraden durch einen Punct A, die einer Geraden a durch denselben Punct conjugirt sind, und die Geraden durch einen Punct B, die einer Geraden b durch denselben Punct für die Kegelschnitte einer Schaar conjugirt sind, sind einander projectiv, man kann sagen, sie seien den Curven der Schaar projectiv.

Confocale Kegelschnitte bilden eine Schaar, sie besteht aus allen Kegelschnitten für die zwei rechtwinklige Strahleninvolutionen zugehörige sind.

Die Puncte, die den Puncten einer Geraden in Bezug auf einen Büschel, d. h. in Bezug auf jede Curve eines Kegelschnittbüschels conjugirt sind, liegen auf einer Curve Γ zweiter Ordnung. Diese Curve enthält auch alle Puncte, die für alle Curven des Büschels dieselbe Polare haben.

Beweis. Die Polaren eines Punctes A gehen durch den Schnittpunct der Polaren aa' für zwei Curven KK' des Büschels. Durchläuft A die Puncte $ABC\ldots$ der Geraden g, deren Polaren für KK' die Geraden aa', bb', $cc'\ldots$ sind, so ist $abc\ldots \overline{\wedge}\, ABC\ldots \overline{\wedge}\, a'b'c'\ldots$, also ist $abc\ldots \overline{\wedge}\, a'b'c'\ldots$, die Polaren erzeugen eine Curve zweiter Ordnung Γ, die die Pole GG' von g für K und K' enthält. KK' sind beliebige Curven des Büschels, es folgt daraus, *dass die Pole einer Geraden g für alle Curven eines Kegelschnittbüschels auf einem Kegelschnitt liegen,* es ist der Kegelschnitt Γ.

Giebt es einen Punct P, der für alle Curven dieselbe Polare p hat, so gehen die Polaren des Schnittpunctes (pg) alle durch P. Die zu g gehörige Curve Γ enthält den Punct P.

Soll die der Geraden g zugehörende Curve Γ in ein Geradenpaar ausarten, so muss $abc\ldots \overline{\wedge}\, a'b'c'\ldots$ sein, die Gerade (GG')

muss sich selbst entsprechen, sie muss die Polare eines Punctes P auf g sein für beide Curven KK', ihre Puncte sind für zwei, also für alle Curven des Kegelschnittbüschels conjugirt, also P muss ein Punct sein, der für den Büschel dieselbe Polare hat. Oder die beiden Pole GG' fallen zusammen. Dann ist g eine Gerade, die für beide Curven, also für alle Curven des Büschels denselben Pol hat. Die Puncte einer Geraden p, die für alle Kegelschnitte des Büschels denselben Pol hat, die einander für den Büschel conjugirt sind, liegen auf den sich selbst entsprechenden Strahlen der beiden Büschel in P, die die Polaren der Puncte ABC.. auf p für zwei Curven KK' des Büschels bilden. Diese können real oder ideal sein. — Γ zerfällt also nur dann in ein Geradenpaar, wenn g durch einen Punct P geht, der dieselbe Polare für die Curven des Kegelschnittbüschels hat, oder wenn g die Polare eines solchen Punctes P ist.

Die Frage, ob die den Puncten einer Geraden für einen Kegelschnittbüschel conjugirten Puncte eine Curve zweiter Ordnung ganz ausfüllen, ist nicht allgemein zu bejahen, sie soll im nächsten Kapitel discutirt werden.

Hier machen wir noch auf eine im Allgemeinen eineindeutige nicht lineare, auf eine sogenannte Cremona'sche Verwandtschaft aufmerksam, die durch die für einen Kegelschnittbüschel conjugirten Puncte hergestellt wird.

Es sei ein Kegelschnittbüschel Σ gegeben, so ist jedem Puncte ein Punct für den Büschel conjugirt. Damit ist eine im Allgemeinen eineindeutige Zuordnung gegeben, die übrigens involutorisch ist, weil A' conjugirt A ist, wenn A conjugirt A' ist. Einzelnen Puncten jedoch (es giebt deren drei), die für alle Curven des Büschels dieselbe Polare haben, sind unendlich viele Puncte, die in einer Geraden liegen, conjugirt. Diese Puncte heissen Hauptpuncte der Cremona'schen Verwandtschaft. Einer geraden Linie aber entspricht ein Kegelschnitt, denn die Puncte, die den Puncten einer Geraden für Σ conjugirt sind, liegen auf einem Kegelschnitt, der die Hauptpuncte der Verwandtschaft enthält. Geht die Gerade durch einen Hauptpunct, so entspricht ihr eine andere Gerade durch denselben Hauptpunct P und die Polare von P. Die Möbius'sche Kreisverwandtschaft, oder wie man auch sagt, die Abbildung durch reciproke radii vectores ist die am frühesten untersuchte Cremona'sche Verwandtschaft, sie lässt sich, wie wir nebenbei bemerken, durch gewisse Modificationen mit der eben besprochenen Verwandtschaft in Zusammenhang bringen. Nimmt man nämlich als Curven KK', die einen Kegelschnitt-

büschel, dessen Grundpuncte die Schnittpuncte von KK' sind, definiren, einen Kreis und die beiden durch den Mittelpunct gehenden idealen, durch die absoluten Puncte gehenden Tangenten als (ausgearteten) Kegelschnitt, construirt zu einem Puncte A die Polare in Bezug auf den Kreis K, und zweitens die Polare für die beiden idealen Geraden K', die durch den Kreismittelpunct geht und senkrecht auf der Verbindungslinie von A mit dem Kreismittelpuncte steht, und nimmt man für den A entsprechenden Punct A' nicht unmittelbar den Schnittpunct der beiden Polaren, sondern dreht die letztere Polare erst um einen rechten Winkel, so dass sie also durch A geht, und nimmt als den A entsprechenden Punct den Schnittpunct der A und den Kreismittelpunct verbindenden Geraden mit der Kreispolare an, so hat man die Möbius'sche Kreisverwandtschaft, deren Hauptpuncte der Kreismittelpunct und die beiden absoluten Puncte sind. Auf eine weitere Untersuchung dieser fruchtbaren Verwandtschaften kann hier nicht eingegangen werden.

Die Geraden, die den Strahlen eines Büschels in Bezug auf eine Kegelschnittschaar conjugirt sind, liegen in einem Büschel zweiter Ordnung, in dem auch die Geraden p liegen, die für alle Curven der Schaar denselben Pol haben, die Doppelpolaren.

Die Polaren eines Punctes für alle Curven einer Schaar stützen sich auf einen Kegelschnitt. Diese den frühern dualistisch zugeordneten Sätze bedürfen keines Beweises.

Einen speciellen Fall eines Kegelschnittbüschels bilden Kegelschnitte, die sich in zwei Puncten berühren, sei es real oder ideal. Die Doppelsehne ist in diesem Falle eine Gerade p, die denselben Pol hat, den Schnittpunct der gemeinsamen realen oder idealen Tangenten, und jeder Punct auf p ist ein Punct P, der für alle Curven der Schaar dieselbe Polare hat, denn der Schnittpunct der gemeinsamen Tangenten und der Punct auf p, der dem Puncte P auf p für alle Curven des Büschels conjugirt ist, sind zwei Puncte, die P für alle Curven conjugirt sind, ihre Verbindungslinie ist mithin eine Gerade, die für alle Curven der Schaar Polare von P ist. Eine Gerade g treffe p in Q, die Polare von Q treffe g in Q', so sind die Schnittpuncte der Curven der Schaar mit g durch Q und Q' harmonisch getrennt, sie bilden also eine Involution in der QQ' Doppelpuncte sind. Der Schnittpunct jeder Geraden mit der Doppelsehne ist ein Doppelpunct der Involution, die der Büschel auf g bestimmt. Die Doppelsehne doppelt gezählt gehört mit zu den Kegelschnitten des Büschels. Mit Hülfe dieses Satzes lösen wir die Aufgabe: es

sind drei Puncte gegeben, es soll durch sie eine Curve zweiter Ordnung gelegt werden, die einen Kegelschnitt K doppelt berührt. — ABC seien die drei Puncte. Die Gerade (AB) treffe K in $A'B'$. Die Doppelpuncte der Involution $AB \,.\, A'B'$. seien γ, γ', so geht die Doppelsehne von K und $\mathfrak{K}$ (wenn $\mathfrak{K}$ die gesuchte Curve ist) durch γ oder γ'. Diese sind real, wenn AB nicht durch K getrennt sind, also wenn beide ausserhalb oder innerhalb K liegen. Die Gerade (AC) treffe K in $A''C''$, die Doppelpuncte der Involution $AC \,.\, A''C''$. seien $\beta\beta'$, sie sind real, wenn AC zugleich innerhalb oder ausserhalb K liegen. Ein Kegelschnitt durch ABC und die Schnittpuncte einer der Geraden $(\gamma\beta)\,(\gamma\beta')\,(\gamma'\beta)\,(\gamma'\beta')$ mit K löst die Aufgabe. Denn ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der K in zwei dieser Puncte berührt und durch A geht, enthält auch die Puncte B und C. Die Gerade (BC) trifft K in $B''C''$. Die Doppelpuncte $\alpha\alpha'$ der Involution $BC \,.\, B''C''$ müssen auf den Geraden $(\gamma\beta)\,(\gamma\beta')\,(\gamma'\beta)\,(\gamma'\beta')$ liegen, $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ sind die Ecken eines Vierseits. Liegen die drei Puncte zugleich innerhalb oder ausserhalb, so giebt es vier Lösungen des Problems, mindestens drei der Lösungen geben reale Berührung von $\mathfrak{K}$ und K, weil von den vier Punctpaaren $\gamma\beta$, $\gamma\beta'$, $\gamma'\beta$, $\gamma'\beta'$ drei einen Punct innerhalb K enthalten. Liegen ABC zu verschiedenen Seiten von K, so giebt es keine Lösungen des Problems.

Um für diese Aufgabe eine Lösung zu finden, die auch dann ausführbar bleibt, wenn von den drei Puncten ABC zwei, etwa AB, aggregirt ideale sind, schalten wir einen Satz ein, der auch an sich von Interesse ist.

Hülfsatz. Jeder Kegelschnitt eines Büschels mit den Grundpuncten $ABCD$, für dessen Individuen $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'\mathfrak{K}''$.. der Schnittpunct P der Geraden $(AB)\,(CD)$ ein und dieselbe durch die Grundpuncte unmittelbar bestimmte Polare p hat, schneidet einen Kegelschnitt K, für den P und p ebenfalls Pol und Polare sind, in Puncten, die zu je zwei mit P in einer Geraden liegen, und die so durch die einzelnen Kegelschnitte des Büschels bestimmten Geradenpaare sind in Involution.

Wir brauchen diesen Satz hier nur für den Fall zu erweisen, dass wenigstens eins der beiden Geradenpaare AB oder CD real ist. — Trifft $\mathfrak{K}$ den Kegelschnitt K in R und S, so trifft $\mathfrak{K}$ K auch in den Puncten $R'S'$, für die $PRpR'$, $PSpS'$ harmonische Würfe sind, also in Punctpaaren, die mit P in einer Geraden liegen. Wir wollen die durch $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'\mathfrak{K}''$.. so bestimmten Geraden bez. mit rs, $r's'$, $r''s''$.. bezeichnen. Der eine Theil unseres Hülf-

satzes ist damit erwiesen, es bleibt noch nachzuweisen, dass $rs \,.\, r's' \,.\, r''s'' \,..$ in Involution sind.

Ist erstens die Gerade (AC) real und trifft sie K in LM, rs in UV, $r's'$ in $UV' \,..,$ so sind $\mathfrak{K} K (rs)$ drei Individuen eines Büschels mit den Grundpuncten $RR'SS'$ und folglich sind die Puncte $AC \,.\, LM \,.\, UV$ in Involution. Ersetzt man $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}'\mathfrak{K}'' \,..$ so findet man in gleicher Weise, weil $ACLM$ fest bleiben, dass $AC \,.\, LM \,.\, UV'$, $AC \,.\, LM \,.\, U''V'' \,..$ in Involution sind, folglich sind die Puncte $AC \,.\, LM \,.\, UV \,.\, UV' \,.\, U''V'' \,..$ und folglich die sie projicirenden Geraden $rs \,.\, r's' \,.\, r''s'' \,..$ in Involution, w. z. b. w.

Sind aber zweitens von den Puncten $ABCD$ zwei, etwa AB, aggregirt ideale, so ist (AC) nicht real, und der Beweis muss modificirt werden.

Wir legen in diesem Falle durch C eine Gerade g und durch D eine Gerade g_1, gg_1 mögen sich in L auf K schneiden. Es treffe g $\mathfrak{K}\mathfrak{K}' \,..$ bez. in CX, $CX' \,..,$ K in LM und rs, $r's' \,..$ bez. in UV, $UV' \,..,$ g_1 treffe $\mathfrak{K}\mathfrak{K}' \,..$ bez. in DX_1, $DX'_1 \,..,$ K in LM_1 und rs, $r's' \,..,$ bez. in U_1V_1, $U'_1V_1' \,..$ und es werde CD mit f, PX, $PX' \,..$ mit x, $x' \,..,$ PX_1, $PX'_1 \,..$ mit x_1, $x'_1 \,..,$ PL mit l, PM mit m, PM_1 mit m_1 bezeichnet. Alsdann gewinnt man aus den Kegelschnittbüscheln $\mathfrak{K} K (rs)$, $\mathfrak{K}' K (r's') \,..$ die Involutionen

$$CX \,.\, LM \,.\, UV,\; CX' \,.\, LM \,.\, UV',\; CX'' \,.\, LM \,.\, U''V'' \,..,$$
$$DX_1 \,.\, LM_1 \,.\, U_1V_1,\; DX'_1 \,.\, LM_1 \,.\, U'_1V'_1,\; CX''_1 \,.\, LM_1 \,.\, U''_1V''_1 \,..$$

oder die Strahleninvolutionen

$$fx \,.\, lm \,.\, rs,\; fx' \,.\, lm \,.\, r's',\; fx'' \,.\, lm \,.\, r''s'', \,..$$
$$fx_1 \,.\, lm_1 \,.\, rs,\; fx_1' \,.\, lm_1 \,.\, r's',\; fx''_1 \,.\, lm_1 \,.\, r''s'', \,..$$

und es ist (siehe Nachtrag) $xx'x'' \,.. \;\overline{\wedge}\; x_1x'_1x''_1 \,..$ Bestimmen wir jetzt die Schnittpuncte dieser Strahleninvolutionen mit einer durch P gehenden Curve zweiter Ordnung Γ, bestimmen also auf dieser Curve Punctinvolutionen, deren Puncte wir der Kürze halber selbst wieder mit $fxl \,..$ bezeichnen, so liegen die Involutionscentren $YY'Y'' \,..$ der krummen Involutionen $fx \,.\, lm \,.\, rs$, $fx' \,.\, lm \,.\, r's' \,..$ auf der Geraden (lm), die Involutionscentren $Y_1Y'_1Y''_1 \,..$ der krummen Involutionen $fx_1 \,.\, lm_1 \,.\, rs$, $fx'_1 \,.\, lm_1 \,.\, r's' \,..$ auf der Geraden (lm_1), und es ist $YY'Y'' \,.. \;\overline{\wedge}\; Y_1Y'_1Y''_1 \,..$ weil $f(xx'x'' \,..)$ $f(x_1x'_1x''_1 \,..)$ projective Büschel sind, deren Strahlen jene Involutionscentren bestimmen. Fällt x auf l (geht der Strahl x durch L) so fällt x_1 auch auf l (es geht der Strahl x_1 auch durch L), die zugehörigen Puncte YY_1 fallen in l auf Γ zusammen, und es sind folglich die Gebilde $YY'Y'' \,..,$ $Y_1Y'_1Y''_1 \,..$ einander perspectiv, die Geraden YY_1, $Y'Y'_1$, $Y''Y''_1 \,..$ gehen durch einen Punct. Diese Geraden bestimmen aber auf Γ die Puncte rs, $r's'$, $r''s'' \,..,$ als Puncte

die immer zwei Involutionen zugleich angehören, und folglich sind diese Puncte, und folglich sind die Strahlen $rs \,.\, r's' \,.\, r''s'' \,..$ in Involution, w. z. b. w.

Nun kehren wir zu unserer Berührungsaufgabe zurück. Gegeben sind drei Puncte ABC von denen die beiden ersten ein ideales Paar sein können, und gegeben ist der Kegelschnitt K, man soll durch die Puncte ABC einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ legen, der K doppelt berührt. Die Gerade (AB) trifft K in den Puncten $\mathfrak{AB}$, die auch ideal sein können, die Doppelpuncte $\gamma\gamma'$ der Involution $AB \,.\, \mathfrak{AB} \,..$ sind in jedem Falle völlig bestimmt. Wählen wir einen davon aus und bezeichnen ihn mit P, verbinden C mit P, und bestimmen D so, dass P durch DC und durch die Schnittpuncte von (PC) mit K von einem und demselben Puncte harmonisch getrennt ist, so ist D ein weiterer Punct von $\mathfrak{K}$. So bleibt die Aufgabe übrig, die Kegelschnitte des Büschels $(ABCD)$ zu finden, die den Kegelschnitt K doppelt berühren, der P und p, die Polare von P für alle Curven des Büschels, zu Pol und Polare hat. Der Büschel $ABCD$ bestimmt mit K nach dem voraufgehenden Hülfsatze eine Strahleninvolution $rs \,.\, r's' \,.\, r''s'' \,..$, die Doppelstrahlen dieser Involution sind die Berührungssehnen der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des Büschels, die K doppelt berühren.

Concentrische Kreise sind ein specieller Fall eines Büschels mit doppelter Berührung.

Hieran schliesst sich die Aufgabe: Eine Curve zu zeichnen, die durch zwei reale oder ideale Puncte geht, zwei reale oder ideale gerade Linien berührt, und endlich durch einen weiteren realen Punct geht oder eine reale Gerade berührt. — Der Kegelschnitt K der vorigen Aufgabe ist hier durch ein Geradenpaar ersetzt. (Fig. 63, Taf. XIV.)

Die Puncte ABC und eine Involution in G seien gegeben. Wir construiren die Paare pp_1, qq_1 der Involution in G, die bez. durch A und C und durch A und B harmonisch getrennt sind. Nimmt man dann Pp_1, Qq_1 als Pol und Polare eines Kegelschnittes K an, wo P der Schnittpunct $p\,(AC)$, Q der Schnittpunct $(AB)\,q$ ist, so sind D und E zwei weitere Puncte dieser Curve, wenn PDp_1B, QEq_1C harmonisch sind. Man erhält vier Kegelschnitte, wenn man bez. Pp_1, Qq_1; P_1p, Qq_1; Pp_1, Q_1q; P_1p, Q_1q als Pol und Polare annimmt. Es sind pp_1 conjugirte Gerade für die gesuchte Curve, die Polare von P geht durch P_1, weil PCP_1A harmonische Puncte sind, und enthält den Pol von p, wenn also nicht P_1 der Pol von p ist, so muss p_1 die Polare von P sein. Da ferner pp_1, qq_1 in der Involution G gepaart sind, so

gehört die Involution G zur Curve, die mithin die Aufgabe löst. Hat G doppelte Strahlen, so sind die Lösungen entweder alle vier real oder keine. Das letztere findet statt, wenn die Doppelstrahlen von G (die Tangenten) durch AC oder AB getrennt sind.

Sind AB ideale Puncte, und sind qq_1 die Strahlen der Involution in G, die von diesen Puncten harmonisch getrennt sind (siehe Seite 111), so sind qq_1 conjugirte Strahlen, und es sind entweder Qq_1 oder Q_1q Pol und Polare der gesuchten Curve. Nehmen wir das erste an, so finden wir wie vorhin in E einen vierten Punct der Curve. K ist also in einem Kegelschnittbüschel zu suchen, von dem vier Puncte $ABCE$ Grundpuncte sind. Sind ll' ein Strahlenpaar der Involution in G, so durchlaufen die Pole von l in Bezug auf die Curven des Büschels eine Curve zweiter Ordnung, die l' in L' und L'' trifft. Die beiden Curven des Büschels, für die $L'l$ bez. $L''l$ Pol und Polare sind, lösen die Aufgabe. Da die Curven auf einer Geraden durch L' oder L'' eine Involution bilden, so ist das Paar dieser Involution zu suchen, das durch $L'l$ bez. $L''l$ harmonisch getrennt ist, dieses Paar liefert zwei weitere Puncte der gesuchten Curve.

Die Lösung der Aufgabe für den Fall, dass zwei reale oder ideale Puncte, zwei reale oder ideale Tangenten und eine reale Tangente gegeben sind, liefert das Princip der Dualität.

Einen speciellen Fall bilden die Aufgaben, in denen ein Brennpunct gegeben ist, denn damit ist eine zur Curve zugehörige Involution gegeben, die die absolute Involution projicirt.

Kapitel VI.

Verbindung zweier Kegelschnitte. Weitere Sätze über Kegelschnittbüschel. Ideale Kegelschnitte.

Zwei Curven zweiter Ordnung KK' besitzen stets mindestens einen realen Doppelpol und eine reale Doppelpolare, d. h. einen Punct, der für beide Curven dieselbe Polare hat und eine Gerade (eben jene Polare), die für beide Curven denselben Pol hat. Der Satz ist mit seinem dualistischen identisch.

Berühren sich K und K', so ist der Berührungspunct ein solcher Doppelpol, und zwar einer der auf seiner Polare, der gemeinsamen Tangente, sitzt. Der Fall der Berührung kann demnach als erledigt angesehen werden.

Berühren sich KK' nicht (Fig. 64, Taf. XIV), so mögen die Polaren der Puncte ABC.. einer Geraden g für K abc.. sein, die Polaren für K' mögen $a'b'c'$.. sein, und die entsprechenden Polaren aa', bb', cc'.. mögen sich in $\alpha\beta\gamma$.. schneiden. Da die Polaren den Puncten ABC.. projectiv sind, so liegen die Puncte $\alpha\beta\gamma$.. auf einer Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$, die durch die Pole GG' von g für K und K' hindurch geht. Die Polaren der Puncte $\mathfrak{ABC}$.. einer andern Geraden $\mathfrak{g}$ für K und K', die Geraden $\mathfrak{abc}$.. bez. $\mathfrak{a'b'c'}$.. schneiden sich paarweise in Puncten $\alpha'\beta'\gamma'$.. eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}'$, der durch die Pole $\mathfrak{GG}'$ der Geraden $\mathfrak{g}$ für K und K' hindurch geht. Die Polaren des Punctes $(g\mathfrak{g})$, der als Punct von g mit L, als Punct von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet werden mag, bestimmen einen $\mathfrak{KK}'$ gemeinsamen Punct, der als Punct von $\mathfrak{K}$ mit λ, als Punct von $\mathfrak{K}'$ mit λ' bezeichnet werden mag. Die Kegelschnitte $\mathfrak{KK}'$ haben daher noch einen zweiten Punct $\mu\mu'$ gemein, wenn sie sich nicht in $\lambda\lambda'$ berühren — ein Fall der besonders besprochen wird, — und dieser Punct $\mu\mu'$ ist ein Doppelpol P und seine Polare eine Doppelpolare p für K und K'. Denn in diesem Puncte treffen sich die Polaren mm' eines Punctes M auf g, und die Polaren $\mathfrak{mm}'$ eines Punctes $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{g}$. Dem Puncte $\mu\mu'$ sind also die Puncte M und $\mathfrak{M}$ für K und K' gleichzeitig conjugirt, die Verbindungslinie p derselben ist die Polare von $\mu\mu'$ oder P für K und K', sie hat für beide Kegelschnitte P zum Pol, P und p sind ein Doppelpol und eine Doppelpolare, w. z. b. w.

Wenn sich aber $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in $\lambda\lambda'$ berühren und nicht weiter schneiden, so kann es zweifelhaft erscheinen, ob ein Doppelpol existirt. Nehmen wir in diesem Falle an, dass $\mathfrak{K}'$ ganz innerhalb $\mathfrak{K}$ liege, so giebt es auf beiden Seiten von g nämlich auf $\mathfrak{g}$ Puncte, deren für K und K' gleichzeitig conjugirte Puncte im Innern von $\mathfrak{K}$, nämlich auf $\mathfrak{K}'$ liegen. Einem Puncte Q ausserhalb $\mathfrak{K}$ sei der Punct R für K und K' gleichzeitig conjugirt. Wir verbinden R mit einem Puncte A auf $\mathfrak{g}$, der mit R auf derselben Seite von g liegt, ihm ist ein Punct α' im Innern von $\mathfrak{K}$ für K und K' gleichzeitig conjugirt. Auf dem Theile der Geraden (RA) der g nicht trifft, muss aus Gründen der Continuität ein Punct liegen, dem ein Punct ξ auf $\mathfrak{K}$ als ein für K und K' conjugirter entspricht. Diesem Puncte ist aber auch ein Punct X auf g für K und K' conjugirt, er besitzt also zwei verschiedene gleichzeitig conjugirte Puncte, er ist ein Doppelpol. Es existirt also ein Doppelpol, seine Polare trifft g und $\mathfrak{g}$. Die Polaren der Puncte (pg) und $(p\mathfrak{g})$ müssen sich in einem Puncte, also in einem

gemeinsamen und realen Puncte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ treffen, und da diese Kegelschnitte ausser $\lambda\lambda'$ keinen gemeinsamen Punct haben, so müssen sich die Polaren von $(gp)(\mathfrak{g}p)$ dort treffen, dieser Punct ist ein Doppelpol, seine Polare eine Doppelpolare. Es ist also auch in diesem Falle ein Doppelpol und eine Doppelpolare vorhanden.

Die Polare irgend eines Doppelpoles muss die Geraden $g\mathfrak{g}$ treffen, die vier Polaren der Schnittpuncte dieser Polare mit g und $\mathfrak{g}$ müssen sich in jenem Doppelpole treffen, er muss also auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ liegen, so dass die gegebene Construction sämmtliche Doppelpole als Schnittpuncte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ liefert. Der dem Puncte $(g\mathfrak{g})$ als gleichzeitig für K und K' conjugirte Punct $\lambda\lambda'$ ist kein Doppelpol, wenn sich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in $\lambda\lambda'$ nicht berühren, wie man sofort erkennt, wenn man die Gerade $\mathfrak{g}$ verlegt. Es wird daher im Allgemeinen drei und nur drei Doppelpole für K und K' geben, von denen zwei ideal sein können.

Die Verbindungslinie zweier Doppelpole ist eine Doppelpolare. — Denn sie ist die Doppelpolare des Schnittpunctes der beiden Doppelpolaren der Doppelpole, die sie verbindet. — *Ebenso ist der Schnitt zweier Doppelpolaren ein Doppelpol.*

Mehr als drei Doppelpole können dadurch zu Stande kommen, dass erstens $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zusammenfallen. Dann ist jeder Punct dieser Curve ein Doppelpol, jede real treffende Secante eine Doppelpolare, und da man durch jeden Punct zwei $\mathfrak{K}$ real treffende Secanten legen kann, so ist jeder Punct ein Doppelpol. Dies kann offenbar nur eintreten, wenn K und K' zusammenfallen, denn in jedem andern Falle ist ein nicht gemeinsamer Punct von K und K' sicher nicht ein Doppelpol. Sind also, was naturgemäss immer vorausgesetzt wird, K und K' nicht identisch, so fallen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ nicht zusammen.

Wenn aber zweitens $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ in Geradenpaare zerfallen, so können sie eine Gerade und einen Punct gemein haben, es können also unendlich viele Doppelpole vorhanden sein, die auf einer Geraden liegen, und noch ein weiterer ausser ihr (der in speciellen Fällen auch noch auf diese Gerade fallen kann). Diese Gerade ist als Verbindungslinie von Doppelpolen selbst eine Doppelpolare, sie werde mit p und ihr Pol mit P bezeichnet. Liegt P nicht auf p, so bestimmt die durch P gehende Doppelpolare jedes Punctes Q auf p einen Q für KK' conjugirten Punct Q' auf p, die Gerade p ist demnach eine Doppelsehne. Die (realen oder idealen) Tangenten in den Schnittpuncten von p mit K sind zugleich Tangenten für K', die Curven K und K'

berühren sich doppelt. Liegt aber P auf p, so müssen sich K und K' in P berühren, und p ist gemeinsame Tangente. Soll auf ihr jeder Punct ein Doppelpol sein, so können sich K und K' ausser in P nicht wieder treffen. Denn wäre S ein gemeinsamer Punct von K und K', so bestimmte die Tangente an K in S auf p einen Punct Q, dessen Polare für K die Gerade (PS) wäre, und da Q Doppelpol sein soll, so muss dieselbe Gerade auch die Polare von Q für K' sein, die Tangente in S an K' muss mit der an K zusammenfallen, die Curven K und K' müssen sich in P und S, also doppelt berühren, die Gerade (PS) wäre eine zweite Gerade, in der jeder Punct ein Doppelpol ist. Daraus würde folgen, dass jede Gerade eine Doppelpolare, jeder Punct ein Doppelpol wäre, dass K und K' identisch wären, was wir ausschlossen. Sind also KK' nicht identisch, so müssen sich diese Kegelschnitte in P so berühren, dass sie gewissermassen vier Puncte miteinander gemein haben, da eben die vier Schnittpuncte, in denen sich zwei Kegelschnitte im Allgemeinen schneiden, in einen zusammengefallen sind. Man sagt in diesem Falle auch, es gehen die Curven in P eine Berührung dritter Ordnung mit einander ein.

Die Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$, welche die den Puncten der Geraden g für K und K' gleichzeitig conjugirten Puncte enthält, zerfällt nur dann in ein Geradenpaar, wenn g durch einen Doppelpol geht. Denn die Verbindungslinie der Pole GG' von g muss ein sich selbst entsprechender Strahl der beiden Büschel $abc\,..$, $a'b'c'\,..$ sein, wenn diese perspectiv sein sollen, sie muss die Polare eines Punctes auf g sowohl für K als auch für K' sein, sie muss eine Doppelpolare, ihr Pol auf g muss ein Doppelpol sein. Wenn demnach die vorhandenen Doppelpole nicht eine Gerade ausfüllen, so kann man g sicher so wählen, dass die zugehörige Curve K nicht in ein Geradenpaar zerfällt.

Giebt es drei reale Doppelpole $PP'P''$ für zwei Kegelschnitte KK', also auch drei reale Doppelpolaren, so bilden sie für KK' ein gemeinsames Polardreieck, ein Doppelpolardreieck.

Giebt es nur einen realen Doppelpol P, so besitzen die Involutionen I und I' für K bez. K' conjugirter Puncte auf der Doppelpolare p kein gemeinsames Paar. Denn das gemeinsame Paar liefert offenbar die beiden andern Doppelpole, weil dem einen Puncte des gemeinsamen Paares der andere desselben und der Punct P für K und K' gleichzeitig conjugirt ist. Die Involutionen I und I' müssen demnach beide hyperbolisch, und ihre Doppel-

puncte müssen durch einander getrennt sein, der Punct P muss ausserhalb K und K' liegen.

Wir nennen, wie schon früher festgesetzt wurde, eine Gerade, auf der Paare für K conjugirter Puncte auch für K' conjugirt sind, unter allen Umständen eine Doppelsehne, gleichviel ob die Schnittpuncte reale oder ideale sind.

Giebt es nur einen realen Doppelpol P, so giebt es durch ihn zwei Doppelsehnen, von denen die eine die Curven KK' in realen, die andere in idealen Puncten trifft. — Wir wollen zuerst von dem Falle, dass P auf seiner Polare liegt, also dass K und K' sich in P berühren, absehen.

Die Involutionen $I\,I'$ für K bez. K' conjugirter Puncte auf der Doppelpolare p des Punctes P haben, wie wir sahen, getrennte reale Doppelpuncte. Daraus folgt, dass sich KK' zweimal und nur zweimal schneiden. Denn Kegelschnitte, von denen der eine ganz ausserhalb oder ganz innerhalb des andern liegt, können von keiner Geraden in getrennten Puncten getroffen werden, und zwei Kegelschnitte, die sich viermal schneiden, besitzen drei reale Doppelpole, die Nebenecken des Vierecks der gemeinsamen Puncte. Die Verbindungslinie s' der beiden Schnittpuncte ist eine Doppelsehne. Der Punct auf ihr, welcher dem Schnittpuncte der Verbindungslinie ihrer Pole für K und K' mit ihr für K und K' conjugirt ist, hat für K und K' dieselbe Polare, die eben gezogene Gerade, und ist deshalb ein Doppelpol, und da nach der Voraussetzung nur ein Doppelpol vorhanden sein soll, so ist er eben dieser. Die beiden Pole der Geraden s' müssen übrigens von einander verschieden sein, wenn s' nicht Doppelberührungssehne, also jeder ihrer Puncte ein Doppelpol ist. — Es giebt also durch unsern Doppelpol P eine Doppelsehne, die KK' real schneidet.

Es giebt aber durch jeden Doppelpol P zwei reale oder ideale Doppelsehnen, den Fall, dass sich KK' doppelt berühren allein ausgenommen. — Wie auch die Kegelschnitte liegen mögen, es giebt stets nicht durch P gehende gerade Linien g, welche K und K' in nicht getrennten, oder den einen oder beide Kegelschnitte in idealen Puncten treffen. Die Involutionen für K und K' conjugirter Puncte auf einer solchen Geraden besitzen nach Seite 84 ein gemeinsames Paar Aα, diese Puncte sind für K und K' gleichzeitig conjugirt. Den Puncten ABC.. der Geraden g sind die Puncte $\alpha\beta\gamma$.. eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, der durch P geht, gleichzeitig conjugirt, die Büschel $P(ABC..)$, $P(\alpha\beta\gamma..)$ sind einander projectiv und da PA, $P\alpha$ ein Paar bilden, so sind sie in

Involution. Die Doppelstrahlen dieser offenbar*) nicht parabolischen Involution enthalten zwei Paare für K und K' conjugirter Puncte, von denen ein Paar auf g und $\mathfrak{K}$ liegt, das andere durch P und p bestimmt wird. Diese Geraden sind deshalb Doppelsehnen der Curven KK'. In dem Falle, den wir eben behandelten, dass nur ein Doppelpol P vorhanden ist, fanden wir eine reale Doppelsehne s' durch P, die der eine Doppelstrahl der besprochenen Strahleninvolution in P ist, es giebt demnach noch einen zweiten realen Doppelstrahl, eine zweite reale Doppelsehne s'' durch P. Sie trifft KK' in denselben aber idealen Puncten, weil sich eben KK', wie wir sahen, nur in zwei realen Puncten schneiden. Da KK' zwei reale Doppelsehnen besitzen, so sind sie Individuen eines Büschels der Art wie er auf Seite 109 erzeugt wurde. P und p sind Pol und Polare für alle Curven dieses Büschels, und dieser ist durch die zwei Curven KK' völlig bestimmt, wir können ihn als Büschel (KK') bezeichnen. Durch einen Punct ist ein Individuum des Büschels bestimmt.

Giebt es drei reale Doppelpole $PP'P''$, deren Doppelpolaren $pp'p''$ sein mögen, giebt es also ein Doppelpolardreieck, so giebt es wenigstens durch einen der Doppelpole ein Paar realer Doppelsehnen, oder durch alle drei. Denn sucht man mit Hülfe der oben benutzten für KK' gleichzeitig conjugirten Puncte $A\alpha$ zu den drei Doppelpolen die Doppelsehnen, so werden diese als die Doppelstrahlen der Involutionen $p'p''.(PA)(P\alpha)..$, $p''p.(P'A)(P'\alpha)..$, $pp'.(P''A)(P''\alpha)..$ gefunden, man erkennt aber aus einer einfachen Zeichnung des Dreiecks $PP'P''$ und der Puncte $A\alpha$, dass die angeschriebenen Paare der drei Involutionen entweder in einem Falle oder in allen drei Fällen nicht durch einander getrennt sind, dass also entweder die eine, oder alle drei Involutionen reale Doppelstrahlen besitzen, es giebt also entweder durch einen der Puncte $PP'P''$ reale Doppelsehnen oder durch alle drei.

Doppelsehnen, die sich in einem Doppelpole schneiden, heissen ein Paar, zwei Doppelsehnen $s's''$, die kein Paar bilden, schneiden sich in einem Puncte der Curven KK', denn ein solcher Schnittpunct ist entweder je einem Puncte auf $s's''$ conjugirt, er ist ein Doppelpol, oder er ist sich selbst conjugirt, er ist ein Punct der Curven. Giebt es demnach drei Doppelpole und nur ein reales Paar von Doppelsehnen, so können sich die Curven KK' nicht real treffen. Denn treffen zwei Doppelsehnen die ein Paar bilden

*) Ausgenommen den Fall, dass P auf einer Doppelberührungssehne liegt.

die Curven real, so haben diese vier reale Puncte gemein, die Seiten des aus ihnen gebildeten Vierecks bilden drei Paare realer Doppelsehnen. Trifft nur eine Doppelsehne die Curven, so wissen wir aus dem Vorhergehenden, dass nur ein realer Doppelpol vorhanden sein kann. Giebt es drei Doppelpole und nur ein Paar realer Doppelsehnen $s's''$, so sind KK' Individuen eines Kegelschnittbüschels durch zwei Paare idealer Puncte, und $[s's'']$ gehört zum Büschel, $PP'P''$ bilden ein Polardreieck für alle Curven des Büschels. Giebt es drei reale Doppelpole und drei Paare realer Doppelsehnen, so sind KK' und die Paare realer Doppelsehnen Individuen eines Kegelschnittbüschels durch die vier realen Schnittpuncte von K und K'. Der Büschel kann in jedem Falle als Büschel (KK') bezeichnet werden.

Berühren sich KK' in einem Puncte P, und ist p die gemeinsame Tangente, und treffen sich KK' noch in zwei Puncten AB, so ist die Gerade s, die AB verbindet, eine Doppelsehne, ihr Schnittpunct P' mit p ist ein Doppelpol, ps sind ein Paar von Doppelsehnen. Ebenso sind $(PA)(PB)$ ein Paar von Doppelsehnen. Durch P gehen also hier drei Doppelsehnen, aber nur zwei davon bilden ein Paar, die Gerade p gehört zu P' und bildet mit s ein Paar. Schneiden sich KK' in idealen Puncten AB, so giebt es durch P nur ein ideales Paar von Doppelsehnen. Die Polaren der Puncte $ABC..$ auf p, $abc..$ für K, $a'b'c'..$ für K' sind diesen und also unter sich projectiv, p ist in dieser Projectivität ein sich selbst entsprechender Strahl. Der zweite gemeinsame Strahl sei p', der zugehörige Punct auf p sei P', er ist ein Doppelpol. Durch diesen Doppelpol P' giebt es ein Paar realer Doppelsehnen, von denen eine p ist, die andere verbindet die idealen Schnittpuncte von KK'.

Es erübrigt noch den Fall zu betrachten, in dem KK' sich in P berühren und nur noch einmal real schneiden, oder was dasselbe ist, den Fall in welchem von dem Paare realer Doppelsehnen durch P eine mit p zusammenfällt. Es sind dann gewissermassen drei Schnittpuncte der Curven KK' in einen zusammengefallen, es findet dort nicht bloss Berührung, sondern Schmiegung (Berührung zweiter Ordnung) statt, es giebt dann nur ein Paar realer Doppelsehnen, von denen p eine ist. Fällt die andere auch auf p, so haben wir in P eine Berührung dritter Ordnung.

Es giebt also in jedem Falle ein Paar realer Doppelsehnen, nur müssen wir in dem Falle der Berührung dritter Ordnung die Tangente im Berührungspuncte als eine doppelte Doppelsehne ansehen, wir müssen sie zweimal zählen. Ebenso ist die Be-

rührungsdoppelsehne, wenn sich KK' doppelt berühren, zweimal zu zählen.

Aus den auf Seite 119 angestellten Betrachtungen folgt, dass jedes Paar von Puncten $A\alpha$, welches für KK' gleichzeitig conjugirt ist, durch jedes Paar vorhandener Doppelsehnen harmonisch getrennt ist, es ist aber üblich, diesen Satz auch noch auf folgende Betrachtung zu gründen.

Die Puncte $A\alpha$ auf g, die uns (Seite 130) zur Auffindung der Doppelsehnen führten, liefern ein Paar der Involution $P(A\alpha\,.\,B\beta\,..)$, deren Doppelstrahlen die Doppelsehnen sind, sie sind also durch dieses Paar harmonisch getrennt. Da aber für $A\alpha$ ein ganz willkürliches Paar von Puncten, die für KK' gleichzeitig conjugirt sind, genommen werden kann, so gilt der Satz allgemein. Hieraus folgt auch wieder, dass ein Paar von Puncten $A\alpha$, die für zwei Curven eines Büschels (KK') conjugirt sind, für alle Curven des Büschels conjugirt sind, denn sie sind von dem immer vorhandenen Doppelsehnenpaare $s's''$ harmonisch getrennt, und mithin ist der einem Puncte für den Büschel conjugirte schon durch $[s's'']$ und eine Curve K völlig bestimmt.

Giebt es drei reale Doppelpole aber nur ein Paar realer Doppelsehnen $s's''$, so giebt es im Büschel (KK') zwei Kegelschnitte, die in Puncte oder vielmehr in Paare idealer gerader Linien, die sich in einem realen Puncte schneiden, ausarten, nämlich die beiden Puncte, von denen die Involutionen für den Büschel conjugirter Puncte auf $s's''$ gleichzeitig projicirt werden. Die durch die idealen Doppelpuncte gehenden Strahlen sind die ausgearteten Kegelschnitte, die auch Grenzpuncte oder Grenzkegelschnitte des Büschels genannt werden. Der Punct $(s's'')$ ist ein Doppelpol P des Büschels, und die eben gefundenen sind die beiden andern Doppelpole $P'P''$. Die Tangente eines durch einen Doppelpol P' auf p gehenden eigentlichen Kegelschnittes des Büschels muss zugleich die Polare p' des Punctes P', die zugehörige Doppelpolare sein, also eine Gerade die nicht durch P' geht. Dies ist nur möglich, wenn der Kegelschnitt durch P' in ein (reales oder ideales) Geradenpaar ausartet, dann ist die Polare des Schnittpunctes der Geraden unbestimmt.

Wie construirt man einen Schmiegungsbüschel? K sei ein Kegelschnitt und p die Schmiegungstangente im Puncte P auf K, S sei ein weiterer willkürlicher Punct auf K. Die Verbindungslinie s der Puncte PS und p bilden ein Paar von Doppelsehnen des Büschels. Ist M ein beliebiger Punct, und legt man durch ihn eine Gerade g, deren Schnittpuncte mit K

A und B, mit p und s C und B sein mögen, und bestimmt man M' gemäss der Involution $AB \,.\, CD \,.\, MM'$, so ist M' ein Punct des Kegelschnittes im Büschel der durch M geht. Durch $PpMM'S$ ist eine Curve des Büschels bestimmt, sie trifft K nur im Puncte S. Denn träfe sie K noch in S', und träfe g die Gerade PS' in C', so müsste M' den beiden Involutionen $AB \,.\, CD \,.\, MM'$, $AB \,.\, C'D \,.\, MM'$ angehören, was nicht möglich ist.

Soll sich in diesem Büschel ein Kreis, der Schmiegungskreis (Krümmungskreis) vorfinden, so kann S nicht willkürlich gewählt werden. Die Puncte LM die K mit der uneigentlichen Geraden gemein hat, und die uneigentlichen Puncte UV von p und s bestimmen eine Involution $LM \,.\, UV \ldots$, der die absoluten Puncte II' angehören müssen, wenn ein Kreis im Büschel enthalten sein soll. Oder umgekehrt, $LM \,.\, II' \ldots$ bestimmen eine Involution der UV angehören müssen, wenn sich im Büschel ein Kreis vorfinden soll. Der Punct U ist gegeben, der Punct V und also S und s werden durch die Involution $LM \,.\, II' \,.\, UV$ bestimmt. Die Aufgabe, den Schmiegungskreis zu construiren, reducirt sich auf die, einen Kreis zu zeichnen, der durch den eben gefundenen Punct S geht und p in P berührt.

Ein Theil der in diesem Kapitel ausgesprochenen Sätze ist identisch mit den dualistischen. Nur in den Sätzen, die von conjugirten Puncten und von Kegelschnittbüscheln handeln, müssen für die conjugirten Puncte conjugirte gerade Linien, für die Kegelschnittbüschel Kegelschnittschaaren eintreten.

Lehrsatz. Durch drei Puncte, von denen zwei ideal sein können, und durch ein Paar conjugirter Puncte AB ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt.

Geht die Gerade AB durch einen der gegebenen Puncte, so ist der von diesem durch AB harmonisch getrennte der vierte Grundpunct des Büschels.

Im allgemeinen Falle bestimmen wir zwei Punctpaare UV, $U'V'$ so, dass $AUBV$, $AU'BV'$ harmonische Würfe sind, wobei AB auch ideal sein können. Die Kegelschnitte KK', die durch die drei gegebenen Puncte und durch UV bez. $U'V'$ bestimmt sind, constituiren den gesuchten Büschel. Der Büschel (KK') enthält alle Kegelschnitte, die unserer Forderung genügen. Denn gäbe es einen Kegelschnitt K'', der dem Büschel (KK') nicht angehörte, aber der Forderung genügte, so würde auch der Büschel (KK'') der Forderung genügen. Die durch den Büschel (KK'') auf (AB) bestimmte Involution muss ebenso wie die durch (KK') bestimmte AB zu Doppelpuncten haben, denn für die durch A

gehenden Kegelschnitte der beiden Büschel kann B nur dann A conjugirt sein, wenn (AB) Tangente an sie ist. Haben die Involutionen, welche die Büschel (KK') (KK'') auf (AB) bestimmen, dieselben Doppelpuncte, so fallen sie ganz zusammen, und die Büschel (KK') (KK'') müssen identisch sein, oder es muss K'' im Büschel (KK') enthalten sein. Die Aufsuchung des vierten Grundpunctes des Büschels wird besonders bequem, wenn man für U den Schnittpunct einer Geraden durch zwei der drei gegebenen Puncte nimmt, weil dann der zugehörige Kegelschnitt K in ein Geradenpaar zerfällt.

Das Gesetz der Dualität lehrt, dass eine Kegelschnittschaar durch drei Tangenten, von denen zwei ideal sein können, und ein Paar conjugirter gerader Linien bestimmt ist.

Durch drei Puncte und zwei Paare conjugirter Puncte ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt bestimmt. — Durch drei Puncte LMN (LM können ein ideales Paar sein) und durch ein Paar conjugirter Puncte AB ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt. Trifft (LM) (AB) in S', und ist S von S' durch AB harmonisch getrennt, so sind (LM), (NS) ein Paar Doppelsehnen des Büschels (die bez. mit $s's''$ bezeichnet werden mögen), denn sie gehören dem Büschel als ein ausgearteter Kegelschnitt an. Das andere gegebene Paar conjugirter Puncte $A'B'$ nehme man als Doppelpuncte einer Involution I_1 an. Die Involution I_2, die die Kegelschnitte des eben gefundenen Büschels auf $(A'B')$ bestimmen, hat mit I_1 entweder ein (reales oder ideales) Paar gemein, oder alle Paare. Im ersten Falle liefert das gemeinsame Paar zwei Puncte des Kegelschnittes der unserer Aufgabe genügt, im zweiten Falle ist der Kegelschnitt durch die Data nicht bestimmt, und jeder Kegelschnitt des gefundenen Büschels genügt der Aufgabe. Es müssen in diesem Falle $A'B'$ durch jedes im Büschel enthaltene Geradenpaar (wie $s's''$) harmonisch getrennt sein.

Dualistisch hierzu ist ein Kegelschnitt im Allgemeinen bestimmt, wenn drei Tangenten und zwei Paare von conjugirten Geraden gegeben sind. Genügen zwei Kegelschnitte diesen Bedingungen, so genügt die durch diese beiden bestimmte Schaar denselben Bedingungen.

Alle Kegelschnitte, die durch drei Puncte und die Paare einer Involution auf einer Geraden g gehen, liegen in einem Kegelschnittbüschel. Denn sind KK' zwei Kegelschnitte, die durch die drei gegebenen Puncte und je ein Paar der Involution gehen, so bestimmen die Individuen des Büschels (KK') auf g eine Involution, die mit der gegebenen zusammenfallen muss, weil sie

zwei Paare mit ihr gemein hat. Ebenso liegen — hierzu dualistisch — alle Kegelschnitte, die drei gegebene gerade Linien, von denen zwei ideal sein können, und je ein Paar einer Strahleninvolution zu Tangenten haben, in einer Kegelschnittschaar.

Lehrsatz. Durch zwei reale oder ideale Puncte und durch zwei Paare conjugirter Puncte ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt. — Die beiden Puncte mögen durch eine Involution auf einer Geraden s, die conjugirten Puncte AB durch eine Involution auf g, die conjugirten Puncte $A'B'$ durch eine Involution auf g' gegeben sein. AB, $A'B'$ können auch ideale Puncte sein. Trifft s die Geraden gg' bez. in U und U', und sind VV' die Puncte, die von UU' bez. durch AB, $A'B'$ harmonisch getrennt sind, und wird VV' mit s' bezeichnet, so ist das Geradenpaar ss' ein Kegelschnitt, der die Forderung befriedigt. Er soll mit K bezeichnet werden. Einen zweiten K' erhalten wir, wenn wir einen Punct M beliebig annehmen und in dem Büschel, der durch den Punct M, die Doppelpuncte der Involution auf s und die Paare der Involution auf g bestimmt ist, den Kegelschnitt bestimmen, für den $A'B'$ conjugirte Puncte sind. Sollte es deren mehrere geben, so wählen wir irgend einen für K'. Die sämmtlichen Kegelschnitte des Büschels (KK') genügen den gestellten Forderungen. Jeder Kegelschnitt K'', der diesen Forderungen genügt, muss ein Individuum des Büschels (KK') sein. Denn gehört er dem Büschel nicht an, so genügt auch der Büschel $(K'K'')$ den Forderungen des Lehrsatzes, für den s eine Doppelsehne ist, s' aber nicht. Es giebt aber eine zweite Doppelsehne s'' des Büschels $(K'K'')$, die mit s ein Paar bildet. Das Geradenpaar ss'' als ein Kegelschnitt des Büschels muss ebenfalls den Forderungen unseres Satzes genügen, und es muss deshalb s'' durch die Puncte VV' auf g und g' gehen, was nicht möglich ist, wenn s'' von s' verschieden ist.

Durch zwei Tangenten und durch zwei Paare conjugirter gerader Linien ist eine Kegelschnittschaar bestimmt.

Lehrsatz. Durch einen Punct L und drei Paare conjugirter Puncte AB auf g, $A'B'$ auf g', $A''B''$ auf g'' ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt, wenn nicht $ABA'B'A''B''$ Ecken eines Vierseits sind. — Nimmt man einen Punct M hinzu, so bestimmen LM und die conjugirten Paare AB, $A'B'$ einen Büschel, in ihm findet man nach geläufigen Methoden den Kegelschnitt K', für den $A''B''$ conjugirt sind. Nimmt man für M einen andern nicht auf K' liegenden Punct, so findet man einen zweiten Kegelschnitt K'', der den Forderungen des ausgesprochenen Lehrsatzes genügt.

$K'K''$ schneiden sich in L, besitzen also eine durch L gehende Doppelsehne s, und folglich eine zweite s', die mit s ein Paar bildet. Bezeichnet man ss' als Kegelschnitt K, so genügt der Büschel (KK') den Forderungen unseres Satzes.

Ebenso findet man leicht die Schaar von Kegelschnitten, von denen eine Tangente und drei Paare conjugirter gerader Linien gegeben sind. Sind die letzteren Seiten eines Vierecks, so giebt es unendlich viele solcher Schaaren.

Es ist leicht einen Büschel zu finden, für den vier Paare von Puncten conjugirte sind, oder eine Schaar zu finden, für die vier Paare von Geraden conjugirte sind. Da aber durch drei Paare conjugirter Puncte nach dem Hesse'schen Satze unendlich viele andere Paare determinirt sind, so wird es in unendlich vielen Fällen unendlich viele Büschel (bez. Schaaren) geben, für die die vier Paare conjugirte sind.

Lehrsatz. Durch ein Polardreieck und ein Paar conjugirter Puncte ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt. — Das Polardreieck sei $PP'P''$, die den Ecken gegenüberliegenden Seiten seien $pp'p''$ (Fig. 65, Taf. XV), die conjugirten Puncte AB liegen auf einer Geraden g. Durch B legen wir eine Gerade h und nehmen sie als Polare von A für eine Curve zweiter Ordnung K an. Wir wählen sie so, dass ihre Schnittpuncte $M'M''$ mit p' und p'' durch die Geraden AP', AP'' getrennt sind. Dann sind die Strahlenpaare (AP'), (AM'); (AP''), (AM'') nicht durch einander getrennt. Der Büschel $A(P'M'.\, P''M''.\, PM)$ ist nach Seite 75 in Involution. Diese Involution muss eine dem Kegelschnitt K zugehörige sein, weil M'' der Pol von AP'', M' der Pol von AP' ist. Die realen Doppelpuncte LM dieser Involution bestimmen mit A zwei Tangenten des Kegelschnittes K und zugleich deren Stützpuncte. Verbindet man einen derselben L mit P, und sucht auf der Verbindungslinie den von dem Stützpuncte durch P und p harmonisch getrennten L', so ist er ein weiterer Punct von K und dieser Kegelschnitt ist nun durch fünf reale Elemente völlig bestimmt. Es ist h die Polare von A für K, weil sie die Berührungspuncte der Tangenten von A an K verbindet. AP, AM sind harmonisch durch die Tangenten getrennt, also conjugirt, der Pol von AP liegt auf AM und auf h, ist also M. Die Polare von P geht durch M und ist durch LL' harmonisch von P getrennt, ist also die Gerade p. Der Pol von AP' ist M', die Polare von P' geht durch M' und P, ist also p', ebenso ist p'' die Polare von P''. Die Curve K genügt also den gestellten Forderungen. Aendert man h in h' ab, so erhält man durch

gleiche Construktion einen Kegelschnitt K', der ebenfalls der Forderung genügt, folglich genügt jedes Individuum des Kegelschnittbüschels (KK') den Forderungen. Aber jeder Kegelschnitt K'', der den Forderungen des in Frage stehenden Satzes Genüge leistet, gehört dem Büschel (KK') an. Denn wäre K'' eine andere den Forderungen genügende Curve, so würden ihnen auch alle Curven des Büschels $(K'K'')$ genügen. In ihm giebt es einen Kegelschnitt K''', der K real trifft, und der Büschel (KK''') genügt ebenfalls den Forderungen. In diesem Büschel ist sicher ein realer Kegelschnitt vorhanden, für den h' Polare von A ist. Durch diese Bestimmung ist aber, wie die obige Construktion lehrt, K' völlig bestimmt. Der Büschel (KK''') muss K' enthalten, der Büschel (KK') muss K''' enthalten, der Büschel $(K'K''')$ muss K'' und K enthalten, der Büschel (KK') muss demnach endlich K'' enthalten, w. z. b. w.

Eine vielleicht einfachere, und, weil sie auch anwendbar bleibt, wenn AB ideal sind, jedenfalls allgemeinere Methode, diesen Büschel zu finden, ist die, dass man aus dem Polardreiecke und einem Paare der Involution, in der AB Doppelpuncte sind, einen Kegelschnitt K construirt, aus dem Polardreiecke und einem andern Paare der Involution einen Kegelschnitt K'. Der Büschel (KK') ist der gesuchte.

Durch ein Polardreieck und ein Paar conjugirter gerader Linien ist dualistich hierzu eine Kegelschnittschaar bestimmt.

Hat ein Kegelschnittbüschel mindestens einen realen Grundpunct, so füllen die Polaren eines Punctes für die Kegelschnitte des Büschels einen linearen Büschel vollständig aus. Denn die Polaren sind den Tangenten in jenem Grundpuncte projectiv, die Tangenten aber füllen einen linearen Büschel völlig aus, weil zu jeder willkürlich gewählten Tangente eine Curve des Büschels gehört, also bedecken auch die Polaren eines Punctes einen linearen Büschel vollständig.

Sind aber die Grundpuncte des Büschels alle vier ideal, so ist dies nicht der Fall. Es giebt dann zwei Grenzkegelschnitte im Büschel, die in zwei Puncte $P'P''$, genauer in zwei Paare idealer sich in je einem realen Puncte schneidender gerader Linien, ausgeartet sind, die beiden Doppelpole des Büschels, durch die keine realen Doppelsehnen gehen. Sind AB für den Kegelschnittbüschel conjugirte Puncte, so sind BP', BP'' die Polaren von A für die Grenzkegelschnitte $P'P''$. Die Kegelschnitte des Büschels bilden auf der Geraden p die $P'P''$ verbindet und deren Pol P sein mag, eine Involution. Durch einen Punct zwischen

$P'P''$ geht ein Individuum des Büschels, und man erhält alle Individuen, wenn man diesen Punct die (eigentliche) Strecke $P'P''$ auf p durchlaufen lässt. Die Polare eines Punctes A auf p an den durch diesen Punct A bestimmten Kegelschnitt des Büschels ist die Tangente in A, und sie dreht sich continuirlich um P, wenn der Kegelschnitt im Büschel sich continuirlich ändert. Wird derselbe etwa durch einen Punct X auf p bestimmt, so erhält man eine continuirliche Folge von Kegelschnitten des Büschels, wenn man X continuirlich ändert. Fällt X auf A, so fällt die Polare von A auf a die Gerade (AP), fällt X auf P' oder P'', so fällt sie auf (AP') bez. (AP''). Die Polaren von A für alle Kegelschnitte des Büschels liegen daher in dem Winkel $P'PP''$, in dem A liegt. Trifft eine Gerade durch P die Gerade p ausserhalb $P'P''$, so giebt es keine Curve im Büschel, für die sie die Polare eines Punctes A auf p zwischen $P'P''$ wäre. Die A für den Büschel conjugirten Puncte auf p bedecken nur den Theil $P'P''$ dieser Geraden, der A enthält. Da die Polaren eines beliebigen Punctes M, dessen conjugirter N sein mag, den Polaren von A projectiv zugeordet sind, so bedecken auch die Polaren von M nur den Theil des linearen Büschels N, der durch (NP'), (NP'') begrenzt ist, und der den Punct M enthält.

Ideale Kegelschnitte. Sind in einem Kegelschnittbüschel mit vier idealen Grundpuncten AB conjugirte Puncte, $PP'P''$ die in diesem Falle realen Doppelpole, von denen $P'P''$ zugleich die Grenzpuncte oder Grenzkegelschnitte sein mögen, und wird $P'P''$ mit p, PP' mit p'', PP'' mit p' bezeichnet, so gehört zu jeder Geraden a durch B, die von der Geraden (AB) durch $P'P''$ nicht getrennt ist, ein realer Kegelschnitt des Büschels, für den a Polare von A ist. Ist aber a von (AB) durch $P'P''$ getrennt, so ist ein solcher Kegelschnitt nicht vorhanden. In diesem Falle adjungiren wir dem Paare $A\ a$ als Pol und Polare einen idealen Kegelschnitt. Ist A' ein andrer Punct, dem B' für den Büschel conjugirt ist, und ist a' die Polare von A', so wird dem Paare $A'a'$ ebenfalls ein idealer Kegelschnitt adjungirt, wenn kein realer zu ihm gehört. Die Polaren $a_1a_2a_3\,..$ von A, wenn zu ihnen reale Kegelschnitte $K_1K_2K_3\,..$ gehören, sind den Polaren $a'_1a'_2a'_3\,..$ von A' für dieselben Kegelschnitte projectiv zugeordnet, dies lassen wir auch für ideale Kegelschnitte gelten. Den Paaren aA, $a'A'$ wird demnach derselbe ideale Kegelschnitt adjungirt, wenn aa' in den projectiven Reihen $a_1a_2a_3\,..\,a\,..$, $a'_1a'_2a'_3\,..\,a'..$ entsprechende Strahlen sind. Die Mannigfaltigkeit der idealen

Kegelschnitte des Büschels wird demnach erschöpft, wenn zu jeder Geraden a durch B, zu der kein realer Kegelschnitt gehört, ein idealer adjungirt wird, und die realen und idealen zusammen sind demnach eineindeutig auf die Strahlen eines linearen Büschels bezogen, ihre Mannigfaltigkeit ist von der Mächtigkeit eines linearen Büschels oder einer geraden Punctreihe. Wir sagen, dass die Kegelschnitte des Büschels, die realen und idealen, den zugehörigen Polaren a des Punctes A projectiv zugeordnet seien.

Die Polaren $aa_1a_2\,..$ von A gehen durch B, die Polaren $bb_1b_2\,..$ von B gehen durch A für reale wie ideale Kegelschnitte des Büschels. Ein Punct heisst den Puncten seiner Polare conjugirt, auch wenn der zugehörige Kegelschnitt ideal ist.

Die Puncte einer Geraden g sind ihren Polaren auch für einen idealen Kegelschnitt K projectiv zugeordnet. — Die Puncte seien $L'M'N'\,..$, ihnen seien auf derselben Geraden für die reellen Kegelschnitte $K_1K_2K_3$ des Büschels bez. die Puncte $L_1M_1N_1\,..$, $L_2M_2N_2\,..$, $L_3M_3N_3\,..$, für K die Puncte $LMN\,..$ zugeordnet. So ist $L'M'N'\,.. \barwedge L_1M_1N_1\,.. \barwedge L_2M_2N_2\,.. \barwedge L_3M_3N_3\,..$, und die realen oder idealen Puncte UV auf g, die einander für den Büschel conjugirte sind, sind in allen diesen Projectivitäten sich selbst entsprechende Puncte. Ist nun dem Wurfe $\alpha\beta\gamma\delta$ der Büschel von vier Kegelschnitten $K_1K_2K_3K$ projectiv (sind etwa $\alpha\beta\gamma\delta$ die Polaren eines Punctes für diese vier Kegelschnitte), so ist $L_1L_2L_3L \barwedge M_1M_2M_3M \barwedge N_1N_2N_3N \barwedge\,..\, \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$. Daraus folgt (Seite 108) dass $L'M'N'\,.. \barwedge LMN\,..$ ist. Es sind also die $L'M'N'\,..$ conjugirten Puncte und folglich die Polaren diesen Puncten projectiv, w. z. b. w. In den Reihen $LMN\,.. \barwedge L'M'N'\,..$ bilden die für den Kegelschnittbüschel conjugirten Puncte UV ein Paar, die Puncte einer Geraden und ihre conjugirten sind demnach in Involution, und wir schliessen daraus, dass auch für ideale Kegelschnitte der Satz richtig ist: Ist $L\mathfrak{L}'$ conjugirt so ist auch $L'\mathfrak{L}$ conjugirt und die Polaren aller Puncte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, weil er allen Puncten dieser Geraden conjugirt ist. Ebenso sind conjugirte Gerade gegenseitig reciprok conjugirt.

Nachdem diese fundamentalen Sätze erwiesen sind, leuchtet von selbst ein, dass der Satz von H e s s e (Seite 76) und der Satz von der perspectiven Lage zweier einander polaren Dreiecke richtig bleibt, wenn auch die darin vorkommenden Pole und Polaren zu einer idealen Curve zweiter Ordnung gehören. Liegen zwei Dreiecke einander perspectiv, so lässt sich nun immer ein realer oder idealer Kegelschnitt finden, für den sie einander polar

sind, die Construktion der Polare eines beliebigen Punctes, wie sie auf Seite 92 und 93 gegeben wurde, unterliegt nicht mehr dem auf Seite 93 gemachten Vorbehalt. Zwei Dreiecke, die einem Kegelschnitte eingeschrieben sind (Seite 94), sind stets Polardreiecke eines realen oder idealen Kegelschnittes. Die Pole einer Geraden für die Individuen eines Kegelschnittbüschels bedecken einen Kegelschnitt vollständig, wenn sie nicht bloss für die realen, sondern auch für die idealen Kegelschnitte des Büschels genommen werden. —

Haben drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3 zwei reale oder ideale Schnittpuncte auf der Geraden s gemein, und sind s_{23}, s_{31}, s_{12} die Doppelsehnen je zweier dieser Kegelschnitte — s_{23} die von K_2, K_3 u. s. w. — die mit s je ein Paar bilden, so schneiden sich diese in einem Puncte.

Es sei P_{12} der Doppelpol auf s für K_1K_2, P_{23} der für K_2K_3, P_{31} der für K_3K_1. Sind die Puncte AB (die auch ideal sein können) für K_1K_2 gleichzeitig und für K_2K_3 gleichzeitig conjugirt, so sind sie auch für K_3K_1 conjugirt, es gehen eben die Polaren von A für alle drei Kegelschnitte durch B. Puncte, die für K_1K_2 gleichzeitig conjugirt sind und ebenso für K_2K_3, liegen auf einer Geraden g durch den Punct $(s_{12}s_{23})$. Denn trifft (Fig. 66, Taf. XV) g die Geraden $ss_{12}s_{23}$ bez. in $NN_{12}N_{23}$, so müssen $NAN_{23}B$, $NAN_{12}B$ harmonische Würfe sein, es müssen also $N_{12}N_{23}$ in $(s_{12}s_{23})$ zusammenfallen. Da aber AB auch für K_3K_1 conjugirt sind, so muss g auch durch den Schnittpunct $(s_{23}s_{31})$ gehen, also müssen sich $s_{12}s_{23}s_{31}$ in einem Puncte schneiden. Es bleibt aber noch übrig nachzuweisen, dass es reale oder ideale Puncte giebt, die für alle drei Curven $K_1K_2K_3$ gleichzeitig conjugirt sind. Es giebt auf s_{13} ein solches Paar. Denn die Involution für K_1K_3 gleichzeitig conjugirter Puncte auf s_{13} hat mit der Involution für K_2 conjugirter Puncte ein reales oder ideales Paar gemein.

Sind $K_1K_2K_3$ Kreise, so enthält die uneigentliche Gerade zwei Puncte, die allen drei Curven gemein sind, nämlich die absoluten Puncte. Die uneigentliche Gerade ist die Gerade s des ausgesprochenen Satzes. Die Geraden s_{12}, s_{23}, s_{31} aber werden in der messenden Geometrie Potenzlinien der Kreise genannt, unser Satz gewinnt daher für diesen speciellen Fall den Ausdruck: Die Potenzlinien je zweier von drei Kreisen gehen durch einen Punct, den Potenzpunct der drei Kreise. — Die Potenzlinie zweier Kreise pflegt mit Hülfe dieses Satzes construirt zu werden.

Ein Kegelschnittbüschel trifft einen Kegelschnitt, der durch zwei reale oder ideale Grundpuncte des Büschels geht, in Puncten

einer Involution, denn die Verbindungslinien der Schnittpuncte gehen nach dem eben Gefundenen durch einen Punct. Damit löst man leicht die Aufgabe, durch vier reale oder ideale Puncte einen Kegelschnitt zu legen, der einen durch zwei derselben Puncte gehenden Kegelschnitt K berührt. Die Doppelpuncte der Involution, die den Kegelschnittbüschel durch die vier Puncte auf K bestimmt, sind die Berührungspuncte. Durch zwei Kegelschnitte des Büschels (die auch Geradenpaare sein können) ist die Involution bestimmt. Hat die Involution keine realen Doppelpuncte, so giebt es keine Lösung der Aufgabe.

Auf jeder Geraden g durch den Schnittpunct Q von $s_{12}s_{23}s_{31}$ giebt es zwei Puncte, die für $K_1K_2K_3$ gleichzeitig conjugirt sind. Die Puncte, die für das Geradenpaar (ss_{12}) und K_2 conjugirt sind, sind auch für K_1K_2 conjugirt, und die Puncte, die für das Paar (ss_{23}) conjugirt sind, sind auch für K_2K_3 conjugirt. Zwei Puncte auf einer Geraden g, die für das Geradenpaar (ss_{12}) conjugirt, d. h. von ihnen harmonisch getrennt sind, sind auch für das Geradenpaar (ss_{23}) conjugirt. Die Involution die für K_2 conjugirt ist, hat ein Paar mit der Involution für ss_{12} und ss_{23} conjugirter Puncte gemein, diese Puncte sind für $K_1K_2K_3$ gleichzeitig conjugirt. Nachzuweisen, dass diese Puncte auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, die auch eine ideale sein kann, mag dem Leser überlassen bleiben. Ausser diesen Puncten ist noch auf der Geraden s jedem Puncte ein anderer auf s für $K_1K_2K_3$ gleichzeitig conjugirt.

Kapitel VII.

Die Clebsch'sche Configuration. Etwas über Collineation. Die Pascal-Steiner'sche Configuration.

Bei der folgenden Untersuchung der Clebsch'schen Configuration ist eine Abhandlung von Schröter im 28. Bande der Leipziger Annalen wesentlich benutzt worden. Die Beweisführung musste natürlich den Grundsätzen dieses Werkchens gemäss von algebraischen Betrachtungen befreit werden, und ausserdem habe ich noch das Clebsch'sche Sechseck als ein projectiv-reguläres Fünfeck mit Centrum aufgefasst, wodurch mir das Bild dieser Configuration an Klarheit zu gewinnen scheint.

Sind vier Puncte $ABCD$ gegeben, und sucht man (Fig. 67,

Taf. XV) zwei weitere Puncte EF von der Beschaffenheit, dass folgende vier Paare unter einander stehender Dreiecke

$$\begin{matrix} BCD & BCD & BCD & BCD \\ EAF & AEF & EFA & FAE \end{matrix}$$

einander perspectiv liegen bez. mit den Perspectivitätscentren

$$I \qquad II \qquad III \qquad IV,$$

so sind $E\,F\,II\,III\,IV$ vollständig bestimmt, wenn I auf (AC) gegeben ist. Dieser Punct aber kann auf (AC) willkürlich gewählt werden.

Es liegt I auf (BE), also E auf (BI), F auf (ID). Es liegt II auf (AB) und auf (FD) gleich (DI), durch $(AB)(DI)$ ist II bestimmt. Ferner liegt III auf (AD) und auf (BE) gleich (BI), durch (AD) und (BI) ist III bestimmt. Nun muss E auch auf $(BIII)$ und (CII) liegen, E ist also bestimmt. F muss auf (DII) und $(CIII)$ liegen und ist dadurch bestimmt. Endlich liegt IV auch auf $(AC)\,(BC)\,(DE)$ (siehe Seite 10) und ist dadurch bestimmt. — Zieht man die Gerade $(II\,III)$, die (BD) in M trifft, so sind MIA Nebenecken des Vierecks $B\,D\,II\,III$ und also ist M von dem Puncte N, in dem sich $(BD)\,(AC)$ schneiden, harmonisch getrennt und von der Wahl des Punctes I auf (AC) unabhängig.

Da das Dreieck IBD dem Dreieck $C\,II\,III$ perspectiv liegt mit dem Perspectivitätscentrum A, so schneiden sich nach dem Satze von Desargues die entsprechenden Seiten in drei Puncten einer Geraden, d. h. MFE liegen auf einer Geraden, oder E und F liegen bei jeder Wahl des Punctes I [auf (AC)] mit M auf einer Geraden.

Da der Punct I noch frei auf (AC) beweglich ist, so kann man ihn so wählen, dass $ACD \overline{\wedge} EFB$ wird mit dem Perspectivitätscentrum V. Die Geraden (BD) und (CF) gleich $(C\,III)$ mögen sich in Z schneiden, (BD) und (AE) mögen sich in Z' schneiden, so muss I so gewählt werden, dass Z und Z' zusammenfallen, dann ist Z der Punct V.

Projiciren wir $BZ'DN$ von A auf (BE) nach $B\,E\,III\,I$, so ist $BZ'DN \overline{\wedge} B\,E\,III\,I$, und projiciren wir $B\,E\,III\,I$ von F aus auf (BD), so erhalten wir $B\,E\,III\,I \overline{\wedge} BMZD$, so dass $BZ'DN \overline{\wedge} BMZD$ ist. Der Wurf $BZ'DN$ ist dem Wurfe $BZ'DM$ (siehe Seite 55) entgegengesetzt, und also sind

$$BZ'DM \text{ und } BMZD \text{ oder } DMBZ' \text{ und } MBDZ$$

entgegengesetzte Würfe. Nach Seite 55 kann man auf zwei Weisen Z so bestimmen, dass Z und Z' zusammenfallen. Um

bei einem bestimmten Falle zu bleiben, wählen wir für V den Punct Z (gleich Z') der von N durch BC nicht getrennt ist. So sind die Puncte $ABCDEF$ nun so construirt, dass sie zunächst fünf Paare perspectiver Dreiecke liefern, die mit ihren zugehörigen Perspectivitätscentren sich wie folgt anschreiben lassen

BCD	BCD	BCD	BCD	ACD
EAF	AEF	EFA	FAE	EFB
I	II	III	IV	V.

Die so construirte Configuration enthält aber zehn Paare von Dreiecken, die einander je vierfach perspectiv liegen. Zunächst findet man, dass zu jedem der Perspectivitätscentren $I\ II\ III\ IV\ V$ je vier perspective Dreieckspaare gehören, die man erhält, wenn man die in der Tabelle übereinander stehenden Eckpuncte mit einander vertauscht. Schreiben wir zuerst die Perspectivitätscentren und rechts davon die vier zugehörigen perspectiven Dreieckspaare an, so erhalten wir die folgende Zusammenstellung:

I	BCD	BCF	BAD	ECD
	EAF	EAD	ECF	BAF
II	BCD	BCF	BED	ACD
	AEF	AED	ACF	BEF
III	BCD	BCA	BFD	ECD
	EFA	EFD	ECA	BFA
IV	BCD	BCE	BAD	FCD
	FAE	FAD	FCE	BAE
V	ACD	ACB	AFD	ECD
	EFB	EFD	ECB	AFB

Nun folgt aus zwei perspectiven Lagen zweier Dreiecke, bei denen die Reihenfolge der Ecken cyclisch vertauscht ist, (nach Seite 10) eine dritte perspective Lage. Aus $ACD \;\overline{\wedge}\; BEF$ und EFB folgt $ACD \;\overline{\wedge}\; FBE$, das Perspectivitätscentrum mag mit VI bezeichnet werden. Es giebt wieder vier Dreieckspaare, die aus den sechs Ecken $ABCDEF$ gebildet werden können und die einander perspectiv liegen mit dem Perspectivitätscentrum VI. Durch weitere Combination cyclisch perspectiver Dreiecke erhält man noch vier neue Perspectivitätscentren mit je vier Paaren perspectiv liegender Dreiecke. Sie lassen sich in folgende Tabelle zusammenstellen, in der oben die Perspectivitätscentren und darunter die zugehörigen Dreieckspaare stehen.

I	II	III	IV	V
BCD	BCD	BCD	BCD	ACD
EAF	AEF	EFA	FAE	EFB
BCF	BCF	BCA	BCE	ACB
EAD	AED	EFD	FAD	EFD
BAD	BED	BFD	BAD	AFD
ECF	ACF	ECA	FCE	ECB
ECD	ACD	ECD	FCD	ECD
BAF	BEF	BFA	BAE	AFB

VI	VII	VIII	IX	X
ACD	ABC	ABE	ACE	ABC
FBE	EFD	DCF	BDF	FDE
ACE	ABD	ABF	ACF	ABE
FBD	EFC	DCE	BDE	FDC
ABD	AFC	ACE	ADE	ABC
FCE	EBD	DBF	BCF	FBE
FCD	EBC	DBE	BCE	FBC
ABE	AFD	ACF	ADF	ADE

Man kann die Configuration auch so anordnen, dass man zu jedem Dreieckspaare die zugehörigen Perspectivitätscentren anschreibt. Man erhält dann folgende Tabelle.

$ABC \overline{\wedge} DEF$	III	VII	X	V
$ABD \overline{\wedge} CEF$	I	VII	VI	IV
$ABE \overline{\wedge} CDF$	VI	VIII	IV	X
$ABF \overline{\wedge} CDE$	I	V	VIII	VII
$ADC \overline{\wedge} BEF$	VI	X	V	II
$AEC \overline{\wedge} BDF$	IX	VI	VIII	III
$AFC \overline{\wedge} BDE$	II	IX	VII	VIII
$ADE \overline{\wedge} BCF$	I	II	IX	X
$ADF \overline{\wedge} BCE$	IV	V	VII	IX
$AEF \overline{\wedge} BCD$	I	II	III	IV

Dies ist die Clebsch'sche Configuration. Sie kann auch als ein projectiv-reguläres Fünfeck mit Centrum aufgefasst

werden. Legt man nämlich durch $BCDEF$ eine Curve zweiter Ordnung K, die in der Zeichnung als ein Kreis (Fig. 68, Taf. XV) mit dem Mittelpunct A angenommen ist, so ist der oben mit M bezeichnete Schnittpunct $(BD)(EF)$ (der in der Zeichnung ein uneigentlicher Punct ist) der Pol der Geraden (AC) für K, denn er ist von N auf (AC) harmonisch durch BD getrennt und liegt auf der Polare von A, weil $IMIV$ ein Polardreieck für K ist. Die Geraden $(BD)(EF)$ schneiden sich also auf der Polare von A. Eine blosse Buchstabenvertauschung lehrt, dass fünf Nebenecken des Fünfecks $BCDEF$ auf der Polare von A für K liegen, nämlich die Nebenecken $(CF)(DE)$, $(BD)(EF)$, $(CE)(BF)$, $(DF)(BC)$, $(BE)(CD)$. Diese Nebenecken sind die Pole der Geraden, die den Punct A, den wir das projective Centrum oder auch schlechthin Centrum des Fünfecks nennen wollen, bez. mit den Puncten $BCDEF$ verbinden. Zu dem dem Kegelschnitte K eingeschriebenen Fünfeckfünfseit $BCDEF$ giebt es demnach einen Punct A, den wir das Centrum desselben nennen, von der Beschaffenheit, dass seine Verbindungslinien mit den Ecken des Fünfeckfünfseits den diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten für K conjugirt sind. Man kann sogar aus den fünf Ecken auf zweierlei Weise ein Fünfeckfünfseit herstellen mit derselben Eigenschaft, nämlich noch das Fünfeckfünfseit $BDFCE$. Aus diesem Grunde wollen wir das Fünfeckfünfseit $BCDEF$ (oder auch $BDFCE$) ein projectiv-reguläres Fünfeckfünfseit nennen mit dem Centrum A.

Hier ergiebt sich naturgemäss die Aufgabe: Einer Curve zweiter Ordnung ein Fünfeckfünfseit einzuschreiben, das projectiv-regulär und dessen Centrum ein gegebener Punct A ist. — Die Polare der Nebenecke $(BD)(EF)$ oder M geht durch den Punct C der Curve K, M liegt also ausserhalb, es liegen also die Nebenecken, die auf der Polare von A liegen, sämmtlich ausserhalb K. Daraus werden wir weiter unten folgern, dass die Polare von A ganz ausserhalb K liegt. Der Punct A muss demnach innerhalb K gegeben sein, wenn die Lösung der Aufgabe möglich sein soll. — Der Wurf $DMBV$ ist ein bestimmter, wenn noch gefordert wird, dass V von M durch BC getrennt sein soll, ich meine, er ist ein bestimmter, wenn $DMBV$ und $BMDV$ entgegengesetzte Würfe sein sollen, wenn aus $ABCDEF$ die Clebsch'sche Configuration oder das projectiv-reguläre Fünfeckfünfseit zu Stande kommen soll. Man sieht nämlich leicht ein, dass dieser Wurf dem Wurfe $\alpha\gamma\beta\lambda$ der zu Seite 55 gehörenden Zeichnung auf Tafel VIII (Fig. 29) projectiv ist. Wird der von

M durch BD harmonisch getrennte Punct (er ist eine Nebenecke des Sechsecks $ABCDEF$) mit N bezeichnet, so ist auch $NVBM$ oder $A(CEBD)$ ein bestimmter Wurf, der aus irgend einer Clebsch'schen Configuration entnommen werden kann. Diesen Wurf, in dem VB durch NM nicht getrennt ist, wollen wir den Fünfeckswurf nennen, weil er dem projectiv-regulären Fünfeck characteristisch ist. Ist γ' die Mitte zwischen $\alpha\beta$ in Fig. 29, so ist der Fünfeckswurf dem Wurfe $\gamma'\lambda\beta\gamma$ projectiv, womit dieser Wurf stereotypirt ist. Die Herstellung dieses Wurfes ist eine Vorbedingung zur Lösung unserer Aufgabe, deren Vollendung aber noch verschoben werden muss; zunächst kehren wir zur Clebsch'schen Configuration zurück.

Wegen der völligen Gleichberechtigung der Ecken einer Clebsch'schen Configuration gegen einander folgt unmittelbar, dass es fünf Gerade giebt, in denen fünf Nebenecken des Sechsecks liegen, jede ist die Polare einer Ecke für die durch die übrigen fünf gehende Curve zweiter Ordnung. Durch diese Nebenecken gehen immer nur je zwei Seiten des Sechsecks. Man kann diese Geraden den Ecken zuordnen, deren Polaren sie sind. Dann liegt die Nebenecke $(BD)(EF)$ auf den beiden A und C zugehörigen Geraden, es liegen daher fünfzehn Nebenecken auf den sechs Geraden, durch jede dieser Nebenecken gehen zwei jener Geraden. Weitere Nebenecken des Clebsch'schen Sechsecks sind die Perspectivitätscentren $I\,II\,..\,X$. Durch sie gehen je drei Seiten des Sechsecks, in ihnen sind von den Nebenecken, die ein gemeines Sechseck hat, drei in eine zusammengefallen. Das Clebsch'sche Sechseck hat demnach nicht 45, sondern nur 25 Nebenecken, 15 liegen zu je fünf auf sechs Geraden, und die zehn übrigen, die Perspectivitätscentren der Clebsch'schen Configuration, sind die Schnittpuncte von je drei Seiten des Sechsecks.

Die Ecken von zwei perspectiv liegenden Dreiecken lassen sich auf vierfache Weise zu einem Brianchon'schen Sechsseitsechseck durch gerade Linien verbinden, z. B. wenn $ABC \overline{\wedge} DEF$ ist, und wenn die Ecken in der Reihenfolge verbunden werden, in der sie angeschrieben sind, so erhält man die vier Brianchon'schen Sechsseitsechsecke

$$ABCDEF,\ ABFDEC,\ AECDBF,\ AEFDBC.$$

So lassen sich aus einem Clebsch'schen Sechseck auf vierzig Arten Brianchon'sche Sechsseite bilden, die in zehn Gruppen von je vier zerfallen. Aus diesem Grunde wird die Clebsch'sche Configuration auch ein zehnfach Brianchon'sches Sechseck genannt.

In der die Clebsch'sche Configuration darstellenden Zeichnung (Fig. 68, Taf. XV) ist A als Mittelpunct eines Kreises, die übrigen fünf Puncte sind als reguläres Fünfeck auf dem Kreise angenommen. Wir lesen aus dieser Figur noch einige Eigenschaften ab, auf deren projectiven Beweis wir füglich verzichten können. — Von den zehn Perspectivitätscentren liegen fünf $I\ II\ III\ V\ X$ innerhalb des Kreises und bilden wieder ein reguläres Fünfeck, also mit A eine neue Clebsch'sche Configuration. Die übrigen $IV\ VI\ VII\ VIII\ IX$ liegen ausserhalb und bilden wieder mit A eine Clebsch'sche Configuration. Wegen der Gleichberechtigung der Ecken muss jede Ecke mit zwei Gruppen von fünf Perspectivitätscentren eine Clebsch'sche Configuration bilden, so dass wir deren zwölf erhalten. Die fünf Nebenecken

$(CF)\,(DE),\ (BD)\,(EF),\ (CE)\,(FB),\ (DF)\,(BC),\ (EB)\,(CD)$

liegen auf der Polare von A, auf der uneigentlichen Geraden, die übrigen fünf Geraden, die je fünf Nebenecken des Sechsecks enthalten, sind die Verbindungslinien der Mitten der Seiten des Fünfeckfünfseits $BCDEF$, diese Mitten geben wieder ein reguläres Fünfeck, und geben so zu neuen Configurationen Anlass.

Schröter findet weiter Gruppen von je sechs Perspectivitätscentren die auf einem Kegelschnitte liegen; diese Untersuchung mag der sich dafür interessirende Leser in der oben angezogenen Abhandlung Schröters studiren.

Eine Collineation. Die Puncte und Geraden einer Ebene sollen einander eineindeutig so zugeordnet werden, dass jedem Puncte einer Geraden durch einen gewissen Punct P ein Punct einer andern Geraden durch P entspricht, da also die Puncte einer Geraden durch P den Puncten einer andern Geraden durch P entsprechen, so sagen wir, die beiden Geraden entsprechen einander, und zwar setzen wir fest, dass die Geraden durch P einander projectiv entsprechen sollen. KK_1K_2.. sei eine Schaar von Curven für die P und p Pol und Polare sind, und die sich in zwei idealen Puncten TT' auf p berühren, so dass p Doppelberührungssehne ist, die idealen Doppeltangenten von P an die Schaar seien tt'. Dies sollen die sich selbst entsprechenden Strahlen der in P gegebenen projectiven Strahlbüschel sein, so dass die Projectivität der Büschel $tt'abc.. \barwedge tt'a'b'c'..$ in P bestimmt ist, wenn noch ein Paar etwa aa' gegeben ist. Jedem Puncte einer der Curven KK_1.. soll ein Punct derselben Curve entsprechen, der Punct P entspricht sich selbst, und einem Puncte auf p entspricht ein andrer Punct auf p. Jetzt ist jedem Puncte L der Ebene ein bestimmter Punct L' zugeordnet, denn liegt L auf dem

Strahl l durch P und auf der Curve K, so liegt L' auf dem l in den Büscheln $tt'ab\,..\barwedge tt'a'b'..$ entsprechenden Strahle l' und auf der Curve K. Nennen wir die Ebene als Feld der ungestrichenen Puncte ε, als Feld der gestrichenen ε', so sind die Puncte in ε den Puncten in ε', die Puncte in ε' den Puncten in ε eindeutig zugeordnet. Die Puncte PTT' sind in dieser Zuordnung sich selbst entsprechende.

Einer Punctreihe $LL_1L_2\,..$ auf dem Strahle l durch P entspricht eine ihr projective oder vielmehr perspective Reihe $L'L'_1L'_2\,..$ auf dem entsprechenden Strahle l' durch P. Es treffe l die Kegelschnitte $KK_1K_2\,..$ ausser in $LL_1L_2\,..$ noch in $MM_1M_2\,..$, so treffen sich die Geraden $(L'L)\,(L'M)$, $(L_1'L_1)\,(L'_1M_1)$, (L'_2L_2) (L'_2M_2),.. mit je einem Paare conjugirter Strahlen durch P auf p (siehe Seite 80) und zwar mit dem Paare, das von ll' harmonisch getrennt ist, also mit einem und demselben Paare. Die Geraden $(LL')\,(L_1L'_1)\,(L_2L'_2)\,..$ gehen durch einen Punct auf p, sie sind also perspectiv.

Wie findet man zu einem Puncte L den entsprechenden L'? Es liege L auf K und l, L' auf K und l'. Der Strahl a treffe K in A, a' treffe K in A', so muss $tt'al \barwedge tt'a'l'$ sein. — Wir projiciren von irgend einem Puncte M des Kegelschnittes K die Puncte $TT'\,(ap)\,(lp)$ auf K und ebenso $TT'\,(a'p)$, die entstehenden projectiven Punctreihen seien $TT'\alpha\lambda \barwedge TT'\alpha'\lambda'$ worin λ' der auf K dem Puncte $(l'p)$ entsprechende Punct ist, der eben zu finden ist. Die Perspectivitätsachse der projectiven krummen Punctreihen auf K ist p, weil sie durch TT' geht, auf ihr müssen sich $(\alpha'\lambda)$ und $(\alpha\lambda')$ schneiden. Dadurch ist λ' bestimmt. $(M\lambda')$ liefert $(l'p)$, und $(l'p)$ mit P verbunden giebt l', und $(l'K)$ giebt L'. — Man kann aber auch das folgende Verfahren einschlagen. (AL) berühre unter den Curven des Büschels (KK_1) den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Die Tangenten an $\mathfrak{K}$ bestimmen auf K projective Punctreihen, in diesen entsprechen die Puncte TT' sich selbst. Legt man von L eine Tangente an $\mathfrak{K}$, und trifft diese K in L', so ist $TT'AL \barwedge TT'A'L'$, und also ist L' der gesuchte Punct, wenn noch bewiesen wird, dass Puncten auf K bei der in Frage stehenden Zuordnung ihnen projectiv zugeordnete auf K entsprechen, was weiter unten geschieht. — Wir wollen dieses Verfahren als projective Drehung um P um den Winkel (aa') bezeichnen. Um den Begriff einer projectiven Drehung um den Punct P vollständig zu charakterisiren, muss ausser P noch ein Kegelschnitt K gegeben sein, der bei der Drehung in seiner Lage ungeändert bleibt. Es drehen sich dann alle Kegelschnitte

$K_1K_2K_3..$ in sich, die mit K auf der Polare p von P eine doppelte Berührung eingehen. Die augenblicklich behandelte Zuordnung der Ebenen ε und ε' ist eine solche, in der jeder Punct aus seinem entsprechenden durch projective Drehung um P um den Winkel (aa') hervorgeht, während ein gegebener Kegelschnitt K sich in sich dreht.

Wir beweisen, dass eine Gerade g durch projective Drehung in eine Gerade g' übergeführt wird, die ihr also in der Zuordnung $\varepsilon\varepsilon'$ entspricht. — Eine Gerade g möge K in X berühren und p in Z treffen, während sie $K_1K_2K_3..$ bez. in $X_1X_2X_3..$ und zum zweiten Male in $Y_1Y_2Y_3..$ trifft, die Gerade a treffe dieselben Curven in $AA_1A_2..$, a' treffe sie in $A'A'_1A'_2..$ Dann sind $P(TX_1T'Y_1)$, $P(TX_2T'Y_2)$,.. harmonische Strahlen, und wenn durch die projective Drehung X in X', $X_1X_2..Y_1Y_2..$ bez. in $X'_1X'_2..$ $Y'_1Y'_2..$ übergeführt werden, so ist $P(TT'AX_1) \barwedge P(TT'A'X'_1)$, $P(TT'AY_1) \barwedge P(TT'A'Y'_1)$, $P(TT'AX_2) \barwedge P(TT'A'X'_2)$,.. daraus folgt, dass auch $P(TX'_1T'Y'_1)$, $P(TX'_2T'Y'_2)$,.. harmonische Strahlen sind. Der geometrische Ort, der die Puncte $X'X'_1Y'_1X'_2Y'_2$,.. verbindet, werde mit Γ bezeichnet und treffe p in Z'. Die Strahlen $P(X'.Z'.X'_1Y'_1.X'_2Y'_2..)$ bilden eine Involution, die der Involution $P(X.Z.X_1Y_1.X_2Y_2..)$ projectiv zugeordnet ist. Zieht man in X' eine Tangente g' an K, und trifft diese die Curven $K_1K_2..$ in Puncten $X''_1Y''_1$, $X''_2Y''_2..$, p in Z'', so ist $P(X'.Z''.X''_1Y''_1..)$ ebenfalls eine Involution. Der Punct Z'' auf p wird durch die PX' conjugirte Gerade h' durch P bestimmt. Die PX conjugirte Gerade durch P sei h, sie geht durch Z. Offenbar aber werden conjugirte durch P gehende gerade Linien — sie sind durch tt' harmonisch getrennt — durch projective Drehung um P in conjugirte Gerade übergeführt, (PX), h in (PX'), h', d. h. der Punct Z'' und der Punct Z' fallen zusammen. Die durch die Gerade g' bestimmte Involution $P(X'.Z'.X''_1Y''_1.X''_2Y''_2..)$ und die durch Γ bestimmte $P(X'.Z'.X'_1Y'_1.X'_2Y'_2..)$ sind identisch, der Zug Γ muss mit der Geraden g' zusammenfallen, die Gerade g wird durch die projective Drehung in eine Gerade g' übergeführt. Es entspricht also in der Zuordnung $\varepsilon\varepsilon'$ nicht bloss jedem Puncte ein Punct, sondern auch jeder Geraden eine Gerade.

Jedem linearen Strahlbüschel entspricht ein ihm projectiver. Denn sind Q und Q' die Centren der Büschel, — sie liegen auf demselben Kegelschnitt K der Schaar $KK_1K_2..$ — und trifft der Büschel Q die Gerade l durch P in $\alpha\beta\gamma..$, und trifft Q' die l entsprechende Gerade l' in $\alpha'\beta'\gamma'..$, so sind diese Punctreihen, wie

oben bewiesen, einander perspectiv, die Büschel sind also projectiv. Die Centren QQ' liegen auf derselben Curve K unserer Schaar, bestimmen also auf ihr projective Punctreihen. Daraus folgt der auf Seite 149 geforderte Satz: Den Puncten einer Curve K, die bei projectiver Drehung ungeändert bleibt, entsprechen Puncte dieser Curve, die den ersten projectiv zugeordnet sind.

Die hier definirte Zuordnung der Puncte und Geraden der ebenen Felder $\varepsilon\varepsilon'$ hat folgende Eigenschaften. Es entspricht jedem Puncte ein Punct, jeder Geraden eine Gerade, jedem linearen Strahlbüschel ein ihm projectiver und folglich jeder geraden Punctreihe eine ihr projective. Dies sind die wesentlichen Eigenschaften einer Collineation. Dass einer Curve oder einem Büschel zweiter Ordnung wieder eine Curve bez. ein Büschel zweiter Ordnung entspricht, dass Pol und Polare, conjugirte Puncte oder Strahlen für einen Kegelschnitt in Pol und Polare, conjugirte Puncte oder Strahlen für die entsprechende Curve übergeführt werden, ist eben wegen der Projectivität der Elementargebilde selbstverständlich. Der Leser mag sich die Aufgabe stellen, durch projective Drehung zwei Puncte in zwei gegebene andere überzuführen, einen beliebigen Kegelschnitt in einen Kreis, d. h. den Punct P und eine Curve K, die sich in sich dreht, zu finden, welche die Lösung vollbringen.

Construction des projectiv-regulären Fünfecks. Der Curve K soll ein projectiv-reguläres Fünfeck mit dem Centrum P eingezeichnet werden. Man nehme eine Ecke A auf K willkürlich an, (AP) habe den Punct M zum Pol, man lege durch P die Geraden xy so, dass sie durch $(PA)(PM)$ nicht getrennt sind, und dass $(PA)xy(PM)$ den auf Seite 147 definirten Fünfeckswurf bilden. Wir machen P zum Centrum einer projectiven Drehung, die K in sich dreht. Drehen wir nun den Büschel $(PA)xy(PM)$ fünfmal im gleichen Sinne um den Winkel (APM), so muss, wenn der Strahl y in seiner Anfangslage eine zweite Ecke des projectiv-regulären Fünfecks bestimmen soll, der Strahl y', der durch fünfmalige projective Drehung aus y hervorgegangen ist, mit y zusammenfallen. Durch die Bedingung, dass $(PA)xy(PM)$ ein Fünfeckswurf sein soll, ist y noch nicht bestimmt, sondern kann willkürlich gewählt werden, aber es sind die Strahlen y den Strahlen y' projectiv zugeordnet den Eigenschaften der projectiven Drehung gemäss. Die sich selbst entsprechenden Strahlen dieser Verwandtschaft geben durch ihren Schnitt mit K je eine Ecke des gesuchten projectiv-regulären Fünfecks. Man sieht leicht ein, dass die beiden sich selbst entsprechenden Strahlen

yy' zwar verschiedene Ecken, aber dasselbe Fünfeck liefern. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Dreht man das ganze projectiv-reguläre Fünfeck um P, so bleibt der Fünfeckswurf unverändert, und mithin ist in jeder Lage die gedrehte Figur ein projectiv-reguläres Fünfeck. Dabei durchwandert der Pol M von AP die Polare p von P vollständig, er liegt ausserhalb K und mithin liegt die Polare von P ganz ausserhalb K, was schon auf Seite 146 ausgesprochen wurde. — Die Seiten des projectiv-regulären Fünfecks berühren alle ein und dieselbe Curve des Büschels oder der Schaar sich in sich projectiv drehender Kegelschnitte.

Eine andere Collineation. Die Bezeichnung Collineation für eine eineindeutige Punct-Punct-, Geraden-Geraden-Zuordnung oder Verwandtschaft wird von den Geometern nicht übereinstimmend gehandhabt. Zuweilen verstehen sie darunter diejenige Zuordnung der Ebenen $\varepsilon\varepsilon'$ (die wir hier als zusammenfallend ansehen) bei der nur drei Puncte, von denen wie in unserem obigen Beispiele zwei ideale sein können, sich selbst entsprechen, zuweilen aber verstehen sie diejenige Zuordnung darunter, bei der die Puncte einer Geraden p, die sogenannte Fluchtlinie, sämmtlich sich selbst entsprechen, und bei der ausserdem die Strahlen eines linearen Büschels sich selbst entsprechen. Der Träger P dieses Büschels ist natürlich ein sich selbst entsprechender Punct, der in speciellen Fällen auch auf p liegen kann. Sind P und p gegeben, und soll jedem Puncte ein Punct, jeder Geraden eine Gerade entsprechen, so ist diese Verwandtschaft völlig bestimmt, wenn noch ein Paar entsprechender Puncte AA' gegeben sind, die mit P auf einer Geraden liegen müssen, weil jedem Puncte auf einer Geraden durch P ein Punct derselben Geraden entsprechen soll. Man könnte die Verwandtschaft, in der nur drei Puncte (und drei gerade Linien) sich selbst entsprechen, passend projective Felderverwandtschaft, die zweite, in der die Puncte der Fluchtlinie sich selbst entsprechen, perspective Felderverwandtschaft nennen. Den Fall, dass P auf p liegt, wollen wir ausschliessen. — Um zu einem Puncte B den zugeordneten B' zu finden, verbinden wir B mit A, der Geraden (BA) muss die Gerade (MA') entsprechen, die sich mit (AB) in M auf p schneidet, denn da dieser Schnittpunct sich selbst entspricht, und da A A' entspricht, so enthält (MA') zwei Puncte, die zwei Puncten auf (AB) entsprechen, und da die Puncte einer Geraden den Puncten einer Geraden entsprechen sollen, so müssen die Puncte auf (AB) den Puncten auf

$(A'M)$ entsprechen. Den Puncten der Geraden (PB) entsprechen Puncte derselben Geraden, also muss B' auf (PB) liegen. B' ist der Schnittpunct von $(A'M)$ und (PM) und ist dadurch eindeutig bestimmt. Lässt man B auf der Geraden (AM) laufen, so läuft B' auf $(A'M)$, und es liegt die Reihe der B der Reihe der B' perspectiv mit dem Perspectivitätscentrum P. Um zu einer Geraden g die entsprechende g' zu finden, braucht man nur zu bemerken, dass die zugeordnete die gegebene auf p treffen muss. Dann braucht man nur noch zu einem Puncte auf ihr den entsprechenden zu construiren und den gefundenen Punct mit (pg) zu verbinden.

Verbindet man A mit M auf p, B mit N auf p, und schneiden sich diese Geraden in C, und sind $A'B'$ die AB entsprechenden Puncte, so sind $(A'M)(B'N)$ die $(AM)(BN)$ entsprechenden Geraden, sie schneiden sich in dem C entsprechenden Puncte C'. Lässt man nun C eine Gerade g durchlaufen, in $C_1 C_2 ..$ übergehen, wodurch MN in $M_1 N_1 ..$ übergehen, so ist $A(MM_1 ..) \overline{\wedge} B(NN_1 ..)$, weil sich die entsprechenden Strahlen auf g schneiden, ferner ist $A(MM_1 ..) \overline{\wedge} A'(M_1 M_2 ..)$, $B(NN_1 ..)$ $\overline{\wedge} B'(N_1 N_2 ..)$, und folglich ist $A'(MM_1 M_2 ..) \overline{\wedge} B'(NN_1 N_2 ..)$. Fällt C auf den Schnittpunct von g mit (AB), so fallen die Puncte MN zusammen und die Strahlen $A'M$, $B'N$ fallen ebenfalls zusammen, entsprechen sich selbst. Daraus folgt, dass $A'(MM_1 M_2 ..)$ $\overline{\wedge} B'(NN_1 N_2 ..)$ ist, und dass also C' eine Gerade durchläuft. Es ist leicht ersichtlich, dass die Reihe der C der Reihe der C' projectiv zugeordnet ist. Demnach entspricht jeder geraden Punctreihe eine ihr projective gerade Punctreihe, und ebenso beweist man, dass jedem linearen Strahlbüschel ein ihm projectiver entspricht. Daraus folgt, dass jedem Kegelschnitt ein Kegelschnitt entspricht, und Gebilden, die für einen Kegelschnitt conjugirt sind, entsprechen Gebilde, die für den entsprechenden Kegelschnitt conjugirt sind.

Die zuerst behandelte Collineation wurde als projective Drehung bezeichnet, die zweite kann als projective Aehnlichkeit angesehen werden. Ist nämlich die Gerade p die uneigentliche, so ist die resultirende Verwandtschaft eine solche, dass verwandte Gebilde einander ähnlich sind und ähnlich liegen mit dem Aehnlichkeitspuncte P. Liegt P auf p, auf der uneigentlichen Geraden, so geht die Aehnlichkeit in Congruenz über, wobei die Begriffe Aehnlichkeit und Congruenz aus der messenden Geometrie genommen sind. In der projectiven Geometrie muss

man Aehnlichkeit und Congruenz gerade durch die eben besprochenen Collineationen definiren.

Sagt man, ein ebenes Feld ε, welches einem ebenen Felde ε_1 perspectiv zugeordnet ist, welchem ε_2 perspectiv zugeordnet ist und so fort.., bis ε_{n-1} dem Felde ε' perspectiv zugeordnet ist, — sagt man, ε sei dem ebenen Felde ε' projectiv zugeordnet, wobei die Felder immer in derselben Ebene liegen sollen, so lässt sich erweisen, dass die Projectivität durch vier Paare entsprechender Puncte bestimmt ist, und dass drei und nur drei sich selbst entsprechende Puncte existiren, oder unendlich viele, die in einer Geraden, der Fluchtlinie, liegen. Doch soll diese Untersuchung hier nur angedeutet werden.

Die Pascal-Steiner'sche Configuration. Von den fünfzehn Seiten eines Sechsecks lassen sich neun auf sechzig Arten so fortnehmen, dass ein Sechsecksechsseit übrig bleibt. Ist eins davon ein Pascal'sches, was hier immer vorausgesetzt wird, so sind sie es sämmtlich, zu jedem gehört eine Pascal'sche Linie. Die Lagenverhältnisse dieser sechzig Pascal'schen Linien sind von Steiner, Plücker, Kirkmann, Hesse, Cayley, Salmon, Bauer und andern untersucht worden. Es ist diese Configuration wegen der grossen Zahl von Linien, aus der sie besteht, so complicirt, dass es schwer ist, sich ein vollständiges Bild davon zu machen; ein Versuch, dieselbe durch eine Zeichnung darzustellen, ist mir nicht begegnet, und es ist die Vorstellung von ihr eine so dunkle, dass Hesse (Crelle's Journal, B. 68, Seite 198) es für möglich hält, die Pascal'schen Linien könnten sich zu dreien auch noch in andern als den Steiner'schen und Kirkmann'schen Puncten schneiden. Ich lasse hier, was von dieser Configuration bekannt ist, theils mit theils ohne Beweis folgen, ohne weder der Form noch dem Inhalte nach meinerseits etwas hinzuzufügen.

Die sechs Ecken eines Pascal'schen Sechsecks mögen mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnet werden. Durch jede der 45 Nebenecken gehen vier Pascal'sche Linien, z. B. durch die Nebenecke (1 2) (4 5) gehen die Pascal'schen Linien die zu den vier Sechsecksechsseiten gehören

1 2 3 4 5 6, 2 1 3 4 5 6, 1 2 3 5 4 6, 2 1 3 5 4 6.

Dabei werden immer die in der angeschriebenen Folge aufeinander folgenden Ecken durch gerade Linien verbunden gedacht, wodurch das Sechsecksechsseit entsteht.

Die Pascal'schen Linien der Sechsecksechsseite

1 2 3 4 5 6, 1 4 3 6 5 2, 1 6 3 2 5 4



schneiden sich in einem Puncte. Bilden wir nämlich die beiden Dreiseite (1 2) (2 5) (5 4), (4 3) (3 6) (6 1),
die Seiten des Pascal'schen Sechsecksechsseits 1 2 5 4 3 6 sind, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der Dreiseite in drei Puncten einer Geraden, der Pascal'schen Geraden des Sechsecksechsseits 1 2 5 4 3 6, die Dreiecke liegen also perspectiv, die Verbindungslinien ihrer Ecken gehen durch einen Punct. Diese Verbindungslinien sind aber die Pascal'schen Geraden der drei oben angeschriebenen Sechsseitsechsecke, z. B. die Gerade, die die Schnittpuncte (1 2) (5 4) und (3 4) (6 1) verbindet, ist die Pascal'sche Gerade des Sechsecksechsseits 1 2 3 4 5 6. Dieser Schnittpunct dreier Pascal'scher Linien heisst ein Steiner'scher Punct G. Man erhält die Steiner'schen Puncte dadurch, dass man irgend ein Sechsecksechsseit anschreibt, z. B. 1 2 3 4 5 6, die an ungerader Stelle stehenden Ecken, hier 1 3 5, festhält, die andern, hier 2 4 6, cyclisch vertauscht. Die drei entstehenden Sechsecksechsseite liefern drei Pascal'sche Gerade, die sich in einem Steiner'schen Puncte G schneiden. Vertauscht man erst zwei an gerader Stelle stehende Ecken, bildet also z. B. aus 1 2 3 4 5 6 das Sechsecksechsseit 1 2 3 6 5 4, und vertauscht nun wieder die an ungerader Stelle stehenden cyclisch, so erhält man wieder drei Sechsecksechsseite, deren Pascal'sche Linien sich in einem Steiner'schen Puncte G' schneiden, welcher der Gegenpunct des vorigen heisst. Um einzusehen, dass dieser Gegenpunct ein vollständig bestimmter ist, dass es gleichgültig ist, welche zwei an gerader Stelle stehende Ecken vertauscht werden, muss man beachten, dass jedes Sechsecksechsseit auf zwölffache Art angeschrieben werden kann, weil jede cyclische oder inverse Vertauschung einer Folge angeschriebener Eckpuncte das zugehörige Sechsecksechsseit nicht ändert.

Die sechzig Pascal'schen Sechsecksechsseite sind so in zwanzig Tripel angeordnet, von denen je zwei Gegenpuncte liefernde Tripel wieder zusammengestellt werden können. Es giebt also zwanzig Steiner'sche Puncte, die sich in zehn Paare von Gegenpuncten anordnen lassen. Steiner hat bewiesen, dass diese Gegenpuncte einander für den Kegelschnitt, auf dem das Sechseck liegt, conjugirte Puncte sind.

Theilen wir die sechs Ecken in drei Paare ab, z. B. in

12 34 56,

so lassen sich diese Paare untereinander und die Elemente unter sich vertauschen, wodurch acht verschiedene Sechsecksechsseite zum Vorschein kommen, weil von den 48 möglichen Vertauschungen

immer sechs dieselbe Figur liefern, nämlich die drei cyclischen Vertauschungen der Paare und deren inverse Vertauschungen. Die acht verschiedenen Sechsecksechsseite lassen sich in vier Paare theilen, so dass in jedem Paare die an ungerader Stelle stehenden Ecken dieselben sind. Es sind, wenn man bei dem gewählten Beispiele bleibt, die vier Paare

1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 6 5	1 2 4 3 6 5	1 2 4 3 5 6
1 4 3 6 5 2	1 4 3 5 6 2	1 3 4 5 6 2	1 3 4 6 5 2.

Die Pascal'schen Linien jedes Paares schneiden sich in einem Steiner'schen Puncte. Wir wollen diese Pascal'schen Linien der Ordnung der Sechsecksechsseitpaare entsprechend mit

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{matrix}$$

bezeichnen. Dann ist

$(p_1 p_2) = ((2\,3)\,(5\,6))$, $(p_2 p_3) = ((3\,4)\,(5\,1))$, $(p_3 \pi_1) = ((1\,2)\,(3\,6))$
$(\pi_1 \pi_2) = ((1\,4)\,(56))$, $(\pi_2 \pi_3) = ((3\,4)\,(6\,2))$, $(\pi_3 p_1) = ((1\,2)\,(4\,5))$.

Werden in einer Folge von sechs Geraden immer die Schnittpuncte zweier aufeinander folgender als Ecken aufgefasst, wie die Verbindungslinien aufeinander folgender Puncte als Seiten aufgefasst werden, so bilden diese sechs Puncte die beiden Sechsecksechsseite

$$p_1 p_2 p_3 \pi_1 \pi_2 \pi_3 \text{ und } p_1\,(5\,6)\,\pi_2\,(3\,4)\,p_3\,(1\,2),$$

die die nicht zusammenstossenden Seiten $p_1 \pi_2 \pi_3$ gemein haben. Das letztere Sechsecksechsseit ist ein Pascal'sches, weil $((1\,2)\,\pi_2) = ((1\,2)\,(3\,5))$, $((3\,4)\,p_1) = ((3\,4)\,(6\,1))$, $((5\,6)\,p_3) = ((5\,6)\,(2\,4))$ auf der Pascal'schen Geraden des Sechsecksechsseits 1 2 4 3 5 6 liegen, also auch das erste, die Puncte $(p_1\pi_1)\,(p_2\pi_2)\,(p_3\pi_3)$ und auf Grund ähnlicher Schlüsse die Puncte $(p_2\pi_2)\,(p_3\pi_3)\,(p_4\pi_4)$ liegen auf einer Geraden, so dass also vier Steiner'sche Puncte

$$(p_1\pi_1)\,(p_2\pi_2)\,(p_3\pi_3)\,(p_4\pi_4)$$

auf einer Geraden liegen, die eine Steiner'sche Gerade heisst. Da sich sechs Puncte auf fünfzehn Arten in drei Paare theilen lassen, so folgt, dass die zwanzig Steiner'schen Puncte zu je vier auf funfzehn Geraden liegen.

Die sechzig Sechsecksechsseite lassen sich in eine Tafel bringen, aus der die Lage der zwanzig Steiner'schen Puncte zu den fünfzehn Steiner'schen Geraden klar hervortritt, die auf folgender Seite steht.



P	1 2 3 4 5 6
	1 4 3 6 5 2
	1 6 3 2 5 4

A_1	1 2 3 4 6 5	B_1	1 3 2 4 6 5	C_1	1 3 2 4 5 6
	1 4 3 5 6 2		1 4 2 5 6 3		1 4 2 6 5 3
	1 5 3 2 6 4		1 5 2 3 6 4		1 6 2 3 5 4
A_2	1 2 4 3 5 6	B_2	1 4 2 5 3 6	C_2	1 3 2 5 4 6
	1 3 4 6 5 2		1 5 2 6 3 4		1 5 2 6 4 3
	1 6 4 2 5 3		1 6 2 4 3 5		1 6 2 3 4 5
A_3	1 2 4 3 6 5	B_3	1 2 6 4 5 3	C_3	1 2 3 5 4 6
	1 3 4 5 6 2		1 4 6 3 5 2		1 5 3 6 4 2
	1 5 4 2 6 3		1 3 6 2 5 4		1 6 3 2 4 5
$\mathfrak{A}_1$	1 5 3 4 6 2	$\mathfrak{A}_2$	1 6 4 3 5 2	$\mathfrak{A}_3$	1 5 4 3 6 2
	1 4 3 2 6 5		1 3 4 2 5 6		1 3 4 2 6 5
	1 2 3 5 6 4		1 2 4 6 5 3		1 2 4 5 6 3
$\mathfrak{B}_1$	1 5 2 4 6 3	$\mathfrak{B}_2$	1 6 2 5 3 4	$\mathfrak{B}_3$	1 3 6 4 5 2
	1 4 2 3 6 5		1 5 2 4 3 6		1 4 6 2 5 3
	1 3 2 6 5 4		1 4 2 6 3 5		1 2 6 3 5 4
$\mathfrak{C}_1$	1 6 2 4 5 3	$\mathfrak{C}_2$	1 6 2 5 4 3	$\mathfrak{C}_3$	1 6 3 5 4 2
	1 4 2 3 5 6		1 5 2 3 4 6		1 5 3 2 4 6
	1 3 2 6 5 4		1 3 2 6 4 5		1 2 3 6 5 4

$\mathfrak{P}$	1 6 3 4 5 2
	1 4 3 2 5 6
	1 2 3 6 5 4

Dies sind sämmtliche sechzig Pascal'schen Sechsecksechsseite, jedes derselben liefert eine Pascal'sche Linie. Die Puncte $P\mathfrak{P}$ $A_1\mathfrak{A}_1 \ldots C_3\mathfrak{C}_3$ sind die zwanzig Steiner'schen Puncte, $A_1\mathfrak{A}_1$, $B_1\mathfrak{B}_1 \ldots$, $C_3\mathfrak{C}_3$, $P\mathfrak{P}$ sind Gegenpuncte. In der Zeichnung (Fig. 69, Taf. XVI) ist die Configuration der Steiner'schen Puncte und Geraden dargestellt, sie giebt ein Partialbild der Pascal-Steiner'schen Configuration, denn es fehlen das Sechseck und die Pascal'schen Geraden selbst, und ebenso die Kirkmann'schen Puncte, Cayley'schen Linien u. s. w., die noch zu besprechen sind.

Die funfzehn Steiner'schen Geraden, auf welchen die zwanzig Steiner'schen Puncte zu je vieren liegen, sind die folgenden:

$PA_1A_2A_3$	$\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$	$A_1B_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$	$A_2B_2\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_1$	$A_3B_3\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$
$PB_1B_2B_3$	$\mathfrak{P}\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2$	$B_1C_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$	$B_2C_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1$	$B_3C_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$
$PC_1C_2C_3$	$\mathfrak{P}\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3$	$C_1A_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$	$C_2A_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_1$	$C_3A_3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$

Die funfzehn Steiner'schen Geraden schneiden sich also zu je drei in den zwanzig Steiner'schen Puncten.

Die Bildungsweise der Tafel ist die folgende. Wir gehen von dem Sechsecksechsseit 1 2 3 4 5 6 aus und bilden, indem wir die ungeradstelligen Ecken festhalten, die geradstelligen aber cyclisch vertauschen, die drei Sechsecke, deren Pascal'sche Linien sich in einem Steiner'schen Puncte P treffen. Hieraus erhalten wir drei andere Gruppen von je drei Sechsecksechsseiten, welche die Steiner'schen Puncte $A_1A_2A_3$ liefern, indem wir die sechs Puncte 1 2 3 4 5 6 in drei Paare 1 2 3 4 5 6 theilen und sowohl die Paare unter einander, als auch die Elemente je eines Paares unter sich vertauschen. Zugleich bilden wir nach der oben angegebenen Weise die Gegenpuncte $\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$. Eine zweite Gruppe von drei Steiner'schen Puncten $B_1B_2B_3$, die mit P auf derselben Geraden liegen, erhalten wir, indem wir die sechs ursprünglichen Puncte in die drei Paare 1 4 2 5 3 6 theilen und mit denselben die eben beschriebene Operation vornehmen, die Gegenpuncte $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ sind daraus in bekannter Weise zu bilden. Endlich theilen wir die gegebenen Puncte in die drei Paare 1 6 2 3 4 5 und gelangen dadurch zu den Puncten $C_1C_2C_3$, die ebenfalls mit P auf einer Geraden liegen, sie rufen die Gegenpuncte $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3$ hervor. Hierdurch werden sämmtliche sechzig Sechsecksechsseite erschöpft, und wir gelangen zu den zwanzig Steiner'schen Puncten, von denen je vier auf einer Geraden liegen, und durch deren jeden drei Steiner'sche Gerade gehen.

Die sechzig Pascal'schen Geraden schneiden sich nicht bloss zu je dreien in zwanzig Steiner'schen Puncten G, sondern auch noch in sechzig Kirkmann'schen Puncten H. Bildet man (Fig. 70, Taf. XVI) alle Sechsecksechsseite, in denen die Seiten (1 2) (2 3) (3 4) (4 5) (5 6) (6 1) nicht vorkommen, so giebt es deren drei, nämlich 1 3 6 4 2 5 1 3 5 2 6 4 1 4 2 6 3 5.
Die Pascal'schen Linien dieser drei Sechsecksechsseite schneiden sich in einem Puncte, einem Kirkmann'schen Puncte. Denn tilgen wir in der Figur die drei Seiten 1 4 2 5 3 6, so bleiben zwei Dreiecke 1 3 5, 2 4 6 übrig (Fig. 71, Taf. XVI), die einem Kegelschnitte eingeschrieben sind, deren Seiten daher (siehe Seite 50) ein Brianchon'sches Sechsecksechsseit bilden. Die Ecken sind ((1 3) (2 6)) ((2 6) (1 5)) ((1 5) (4 6)) ((4 6) (3 5)) ((3 5) (2 4)) ((2 4) (1 3)).

Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken schneiden sich in dem Kirkmann'schen Puncte H, sie sind die Pascal'schen Linien der drei oben angeschriebenen Sechsecksechsseite, denn, um dies nur beim ersten nachzuweisen, (1 3) (4 2), (3 6) (2 5), (6 4) (5 1) bestimmen eine Pascal'sche Linie. Der Kirkmann'sche Punct wurde auf bestimmte Weise aus dem Sechsecksechsseite 1 2 3 4 5 6 abgeleitet, zu dem auch eine bestimmte Pascal'sche Gerade gehört. Die Pascal'schen Geraden und die Kirkmann'schen Puncte sind demnach einander durch das zugehörige Sechsecksechsseit eineindeutig zugeordnet. Wir wollen die Pascal'schen Linien durch die zugehörigen Sechsecksechsseite bezeichnen und den Schnittpunct von drei Geraden abc mit (abc). Es sei

$$p = 1\,2\,3\,4\,5\,6, \quad H = (p'p''p'''),$$

$$p' = 1\,3\,6\,4\,2\,5, \quad p'' = 1\,3\,5\,2\,6\,4, \quad p''' = 1\,4\,2\,6\,3\,5,$$

und es seien $H'H''H'''$ die zu $p'p''p'''$ gehörenden Kirkmann'schen Puncte

$$H' = (p'_1 p'_2 p'_3) \qquad H'' = (p''_1 p''_2 p''_3) \qquad H''' = (p'''_1 p'''_2 p'''_3).$$

Die oben gegebene Regel giebt

$$\begin{array}{lll} p'_1 = 1\,5\,6\,3\,4\,2 & p'_2 = 5\,6\,1\,2\,3\,4 & p'_3 = 5\,1\,6\,4\,2\,3 \\ p''_1 = 1\,3\,2\,5\,6\,4 & p''_2 = 1\,2\,3\,4\,5\,6 & p''_3 = 2\,3\,1\,6\,4\,5 \\ p'''_1 = 5\,3\,4\,1\,2\,6 & p'''_2 = 3\,4\,5\,6\,1\,2 & p'''_3 = 4\,5\,3\,2\,6\,1 \end{array}$$

Die Linien $p'_2 p''_2 p'''_2$ sind dieselben, weil sie zu demselben Sechsseitsechsecke gehören. So wie also durch einen Kirkmann'schen Punct drei Pascal'sche Gerade gehen, so liegen auf einer Pascal'schen Geraden drei Kirkmann'sche Puncte, wozu noch ein Steiner'scher Punct kommt.

Die Salmon-Cayley'schen Sätze lasse ich noch ohne Beweis folgen. — Ausser auf den sechzig Pascal'schen Geraden liegen die Kirkmann'schen Puncte noch zu je dreien auf zwanzig Cayley'schen Geraden x, deren jede ausserdem noch einen Steiner'schen Punct G enthält. Diese zwanzig Geraden x gehen zu je vieren durch funfzehn Salmon'sche Puncte Y.

Man bemerkt nun in diesen Sätzen eine gewisse Dualität.

Es giebt sechzig Pascal'sche Linien und sechzig Kirkmann'sche Puncte. Durch einen Kirkmann'schen Punct gehen drei Pascal'sche Linien, auf einer Pascal'schen Geraden liegen drei Kirkmann'sche Puncte.

Es giebt zwanzig Steiner'sche Puncte und zwanzig Cayley'sche Linien. In jedem Steiner'schen Puncte schneiden sich drei Pascal'sche Linien, auf jeder Cayley'schen Linie liegen drei Kirkmann'sche Puncte.

Jede Pascal'sche Linie enthält einen Steiner'schen Punct, durch jeden Kirkmann'schen Punct geht eine Cayley'sche Linie.

Es giebt funfzehn Steiner'sche Linien, deren jede vier Steiner'sche Puncte enthält, und es giebt funfzehn Salmon'sche Puncte, durch jeden derselben gehen vier Cayley'sche Linien.

Es giebt jedoch keinen Kegelschnitt, für den die einander im angegebenen Sinne dualistisch gegenüberstehenden Puncte und Geraden Pole und Polare wären, wohl aber hat Herr Bauer in seiner Abhandlung über das Pascal'sche Theorem (Abhandlungen der zweiten Klasse der k. Academie der Wissenschaften zu München, Band XI, Abtheil. III. 1874) gezeigt, dass sich aus der Pascal-Steiner'schen Configuration mehrfach Theilconfigurationen bilden lassen, für die vollständige Dualität, bezogen auf einen realen oder idealen Kegelschnitt, besteht Dort findet man auch die Salmon-Cayley'schen Sätze bewiesen. Man vergleiche ausserdem Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, zweite Auflage, Artikel 287.

Kapitel VIII.

Massverhältnisse.

Dass die Massverhältnisse in der Ebene als Beziehungen zu einem gegebenen Kegelschnitt aufgefasst werden können, hat v. Staudt bemerkt, um aber Massbestimmungen zu erhalten, die dem Wesen nach mit den Euklidischen übereinstimmen, darf man nicht jeden Kegelschnitt als massgebenden wählen, sondern man nimmt hierzu einen singulären Kegelschnitt, der aus zwei zusammenfallenden Geraden besteht. — Nimmt man einen beliebigen Kegelschnitt Ξ an und betrachtet alle Figuren der Ebene als einander congruent, die durch projective Drehung um einen beliebigen Punct auseinander entstehen, wenn bei der Drehung Ξ festbleibt, sich in sich dreht, so ist damit auch der Begriff gleicher Winkel und Strecken festgelegt als solcher Winkel und Strecken, die durch projective Drehung mit einander zur Deckung gebracht werden können. Um aber Winkel und Strecken durch Masszahlen ausdrücken zu können, bedarf man noch für diese Gebilde einer Masseinheit und eines Princips der Theilung dieser Masseinheit, letzteres liegt indessen schon in der Forderung, dass die beiden Hälften einer Strecke oder eines Winkels einander gleich sein müssen. Da für Ξ conjugirte gerade Linien in

ebensolche durch projective Drehung übergehen, so hat man in dem Winkel, den ein Paar conjugirter gerader Linien einschliessen, eine natürliche Einheit, die man Quadrant oder einen rechten Winkel nennt. Legt man durch den Scheitel eines Winkels dasjenige Paar für Ξ conjugirter gerader Linien, das von den Schenkeln des Winkels harmonisch getrennt ist, so lässt sich beweisen, dass jede dieser Geraden, die eine den Winkel, die andre den Nebenwinkel in congruente Theile theilt, dass also die Winkel durch diese Geraden gehälftet werden. Nimmt man nun irgend einen rechten Winkel als gegeben an und macht ihn durch fortgesetztes Hälften zu einer Alhidade, was freilich vollständig nur dann möglich ist, wenn der Alhidadenmittelpunct M im Innern von Ξ liegt, oder wenn Ξ ein idealer Kegelschnitt ist, so kann man nun, wenn M im Innern von Ξ liegt, oder wenn Ξ ideal ist, von jedem Winkel an der Alhidade angeben, wie viel Rechte, wie viel halbe Rechte, wie viel Viertelrechte, Achtelrechte u. s. w. derselbe enthält, seine Masszahl in rechten Winkeln ausgedrückt lässt sich in die Form setzen

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \cdots,$$

worin α eine ganze Zahl ist, $\beta\gamma\delta\,..$ aber Null oder Eins bedeuten. Zu jedem Winkel gehört so eine bestimmte Masszahl, und da sich jede Zahl in die obige Form bringen lässt, so gehört auch zu jeder Masszahl*) ein bestimmter Winkel und die ihm congruenten.

Als Mass der Entfernung zweier Puncte kann man den Winkel wählen, unter dem sich die Polaren dieser Puncte schneiden. Die Masseinheit für Strecken ist dann genau dieselbe wie die für Winkel. Die Mitte oder die Hälfte einer Strecke $|AB|$ wird dadurch gefunden, dass man das Paar conjugirter Puncte auf $|AB|$ sucht, welches AB harmonisch trennt, der eine Punct des Paares trennt die eine, die innere Strecke $|AB|$ in zwei gleiche Theile, der andere die äussere. Liegen beide Puncte innerhalb, oder ausserhalb Ξ, oder ist Ξ ideal, so ist die Mitte immer real. Ist Ξ ein realer Kegelschnitt, so lässt sich nicht jeder Winkel durch projective Drehung mit einem an der Alhidade zur Deckung bringen, die Massverhältnisse werden dadurch verworren, weil real in Erscheinung tretenden Winkeln und Strecken nicht durchgehend reale Zahlengrössen sich zuordnen lassen. Dies ist nicht der Fall, wenn Ξ ein idealer Kegelschnitt

*) Man vergleiche jedoch Seite 2 der Einleitung.

ist. Es soll jedoch hier auf derartige Verhältnisse nicht näher eingegangen werden, es genügt die Bemerkung gemacht zu haben, dass bei dieser Art von Massbestimmung ein principieller Unterschied zwischen Winkel- und Streckenmass nicht vorhanden ist, dass für beide dieselbe Einheit dient. Es sind solche Massbestimmungen mithin von den Euklidischen wesentlich verschieden.

Der Kegelschnitt Ξ, der zu einer Massbestimmung von wesentlich Euklidischem Charakter führt, ist ein ausgearteter Kegelschnitt, und zwar eine Gerade doppelt gezählt. Da als Pol einer Geraden für eine Doppelgerade jeder Punct der Doppelgeraden selbst angesehen werden kann, so muss man, um den Begriff conjugirter Geraden zu fixiren, noch das reciproke Gebilde, den Strahlbüschel zweiter Ordnung angeben, dessen Stützcurve die Doppelgerade ist, d. h. zwei Puncte auf ihr, die als Träger zweier linearer Büschel zusammen den Strahlbüschel zweiter Ordnung constituiren. Nimmt man für diese Puncte zwei reale Puncte an, und nennt man den Winkel, den irgend ein Paar conjugirter gerader Linien, d. h. von jenen beiden Puncten harmonisch getrennter Linien mit einander einschliessen, einen rechten Winkel, so bildet jede Gerade durch einen der beiden Büschelträger auf der Doppelgeraden einen rechten Winkel mit sich selbst, was bei der Euklidischen Massbestimmung für reale Gerade niemals statt hat. Deshalb werden für jene beiden Puncte auf der Doppelgeraden aggregirt ideale Puncte zu wählen sein. — Nun erübrigt noch irgend eine Gerade der Ebene als Doppelgerade, auf die eine Massbestimmung gegründet werden soll, auszuzeichnen. Da scheint es fast selbstverständlich, diejenige Gerade der Ebene zu wählen, die sich in unserer Vorstellung von selbst auszeichnet, die uneigentliche Gerade.

Für die Wahl der idealen Büschelträger hingegen auf der uneigentlichen Geraden giebt es kein auszeichnendes Moment. Wir wählen dafür die Schnittpuncte irgend einer Ellipse Ξ mit der uneigentlichen Geraden, bezeichnen sie mit T und T' und nennen sie die a b s o l u t e n P u n c t e. Die uneigentliche Gerade selbst kann mit (TT') bezeichnet werden. Die Curve Ξ ist nicht mehr wie vorhin die sich in sich drehende Curve, sondern sie ist nur ein durch die absoluten Puncte gehender Kegelschnitt. Gleichwohl werden wir sie als die Masscurve oder den Masskreis bezeichnen, weil sie bei der Massgebung noch eine besondere Rolle zu spielen hat, wie wir sogleich sehen werden. — Die Durchmesser der Curve Ξ stehen senkrecht auf einander, die Strecke vom Mittelpuncte bis zu einem Schnittpuncte mit Ξ nennen

wir Halbmesser. Im Mittelpuncte M von Ξ befindet sich die Alhidade, mit der alle Winkel zu vergleichen oder zu messen sind, sie wird durch fortgesetztes Hälften eines rechten Winkels hergestellt.

Die Polare irgend eines Punctes für die uneigentliche Gerade als Doppelgerade ist diese Gerade selbst. Die Polaren zweier Puncte fallen demnach zusammen, der von ihnen eingeschlossene Winkel kann nicht zum Messen der Entfernung dieser Puncte dienen, während die oben getroffenen Bestimmungen zum Hälften einer Strecke sehr wohl anwendbar bleiben. Denn von zwei Puncten, die für die Doppelgerade conjugirt und zugleich durch zwei gegebene Puncte AB harmonisch getrennt sind, ist einer ein uneigentlicher, der andere aber hälftet die Strecke $|AB|$, wie wir schon früher festgesetzt haben. Aus diesem Grunde bleibt die Masseinheit für Strecken willkürlich. Ist die Masseinheit auf irgend einer Geraden gegeben, so ist sie damit für alle dieser parallelen Geraden festgelegt, wenn wir festsetzen, dass eine Strecke auf einer ihr parallelen Geraden durch Parallelprojection eine ihr gleiche Strecke erzeugt, oder wenn wir festsetzen, dass in einem Parallelogramme die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein sollen. Verlangen wir noch, dass eine Strecke durch projective Drehung, bei der die uneigentliche Gerade sich in sich dreht, und die absoluten Puncte festbleiben, in eine ihr gleiche Strecke übergeführt wird, so müssen die Halbmesser des Kegelschnittes Ξ alle einander gleich sein, weil diese Curve bei einer Drehung, deren Centrum der Mittelpunct von Ξ ist, sich in sich dreht. Durch die Halbmesser von Ξ ist die Masseinheit für jede Gerade der Ebene gegeben.

Bei der so definirten Massbestimmung ist die Masseinheit für Winkel eine andere als die für Strecken, sie befindet sich darin in Uebereinstimmung mit der Euklidischen Geometrie. Diese Verschiedenheit ist der Grund dafür, dass für Sätze, die Massverhältnisse enthalten, das Gesetz der Dualität keine Anwendbarkeit findet. —

Ist a parallel a', b parallel b', und wird die Parallelität in gleichem Sinne genommen, so soll der Winkel ab gleich dem Winkel $a'b'$ sein. Vermittelst dieser Bestimmung kann jeder Winkel mit einem im Mittelpuncte von Ξ, mit der Alhidade verglichen werden. Sind ab einem Paare conjugirter Durchmesser von Ξ parallel, so sind sie durch die absoluten Puncte harmonisch getrennt und schliessen einen rechten Winkel mit einander ein.

Ein Winkel und sein Nebenwinkel wird durch dasjenige rechtwinklige Geradenpaar gehälftet, welches durch die Schenkel des Winkels harmonisch getrennt ist. Dies ist die Definition der Hälfte. Wird ein Winkel ab gehälftet, und wird sein Bild $a'b'$ an der Alhidade gehälftet, so sind die hälftenden Strahlen einander parallel, folglich sind die Hälften eines Winkels den Hälften des Bildes an der Alhidade gleich. — Zwei Winkel AMB, $A'MB'$, — wir können M als Mittelpunct von Ξ, die Winkel an der Alhidade, die Puncte $ABA'B'$ auf Ξ annehmen — heissen einander gleich, wenn AMB' durch dieselbe Gerade gehälftet wird als BMA', oder, was ein bequemeres Erkennungsmittel bildet, wenn AB' parallel BA' ist. Diese beiden Definitionen besagen dasselbe. Denn ist AB' parallel $A'B$ und g' der ihnen parallele Durchmesser, so geht der g' conjugirte Durchmesser g durch die Mitte sowohl von $|AB'|$ als auch durch die Mitte von $|BA'|$, gg' ist sowohl durch AB' als auch durch BA' harmonisch getrennt. — Es folgt daraus unmittelbar, dass Scheitelwinkel einander gleich sind, und aus dem auf Seite 83 bewiesenen Satze folgt, dass rechte Winkel einander gleich sind.

Wird ein Winkel AMB durch die Gerade MC gehälftet, so sind die beiden Hälften einander gleich, denn CC (die Tangente in C) ist parallel AB.

Durch projective Drehung, bei der Ξ sich in sich dreht und M Drehungscentrum ist, wird ein Winkel in einen ihm gleichen übergeführt. — Der Winkel AMB werde in $A'MB'$ übergeführt. Dann ist nach Seite 149 $TT'AB \overline{\wedge} TT'A'B'$, und es schneiden sich (AB') und (BA') auf der Perspectivitätsachse dieser krummen Reihen, also auf (TT'), d. h. (AB') ist parallel (BA'), die Winkel sind gleich.

Hälftet man den Winkel AMB durch (MC), den ihm gleichen Winkel $A'MB'$ durch (MC'), so ist CMB gleich $C'MB'$. Denn bringt man ACB durch projective Drehung zur Deckung mit $A'C''B'$, und wird D so bestimmt, dass $M(ACBD)$ ein harmonischer Büschel ist, und fällt D durch die Drehung auf D', so ist auch $M(A'C''B'D')$ ein harmonischer Büschel, und (MC''), (MD') sind conjugirte gerade Linien. Daraus folgt, dass MC'' den Winkel $A'MB'$ hälftet, dass also C'' und C' zusammenfallen. Es muss (CC') parallel (AB') und $(A'B)$ sein. Dreht man noch um den Winkel $A'MC'$ weiter, so fällt der ursprüngliche Winkel AMC auf $C'MB'$, so dass auch diese Winkel gleich sind. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass jeder halbe Rechte jedem halben

Rechten, dass jeder Viertelrechte jedem Viertelrechten, jeder Achtelrechte jedem Achtelrechten u. s. w. gleich ist.

Ist (Fig. 72, Taf. XVI) einer von zwei gleichen Winkeln AMB gleich $A'MB'$ einem dritten $A''MB''$ gleich, so sind sie unter sich gleich. — Ist (AB') parallel $(A'B)$, und ist $(A''B')$ parallel $(A'B'')$, so ziehe man (AB'') und $(A''B)$ und betrachte das Pascal'sche Sechsecksechsseit $BA'B''AB'A''$. Die gegenüberliegenden Seiten müssen sich in drei Puncten einer Geraden schneiden. Nun schneiden sich (BA') und (AB'), $(A'B'')$ und $(A''B')$ auf der uneigentlichen Geraden, also müssen sich auch $(B''A)$ und $(A''B)$ auf der uneigentlichen Geraden schneiden, es muss (AB'') parallel $(A''B)$ sein, also muss Winkel AMB gleich Winkel $A''MB''$ sein.

Gleiche Winkel zu gleichen Winkeln addirt geben gleiche Winkel. — Es sei AMB gleich $A'MB'$, BMC gleich $B'MC'$, so ist (AB') parallel $(A'B)$ und (AB') parallel (CC'), also (AA') parallel (CC').

Man beweist leicht, dass in einer Summe von Winkeln die Posten mit einander vertauscht werden können.

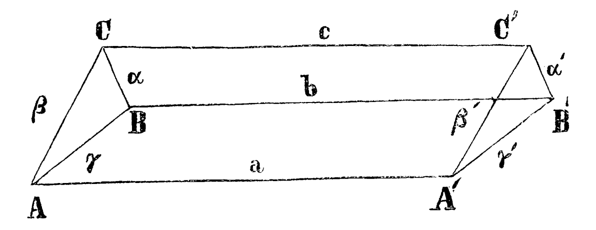
Gleiche Winkel enthalten gleich viele Rechte, halbe Rechte, Viertelrechte u. s. w., sie lassen sich einer Zahl von der Form

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \cdots$$

zuordnen, wo α eine ganze Zahl ist, $\beta\gamma\delta\ldots$ aber die Zahlen 0, 1 bedeuten, also gleichen Winkeln kommen gleiche Masszahlen zu.

Die Summe der Winkel im Dreieck ist zwei Rechte. Denn es gelten die Sätze der gewöhnlichen Parallelentheorie. Ein gestreckter Winkel ist aber offenbar gleich zwei Rechten.

Ist eine von zwei gleichen Strecken auf parallelen Geraden einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.



Es sei die Strecke $|AA'|$ auf a gleich der ihr parallelen Strecke $|BB'|$ auf b und gleich der ihr parallelen Strecke $|CC|$ auf c, so ist auch die Strecke $|CC'|$ gleich $|BB'|$.

Nach Voraussetzung ist $ABB'A'$ ein Parallelogramm und $ACC'A'$ ein Parallelogramm. Es wird behauptet, dass auch $BCC'B'$ ein Parallelogramm sei.

Beweis. Die Verbindungslinien der Ecken $AA'(a)$, $BB'(b)$, $CC'(c)$ gehen durch einen Punct, den unendlich fernen der drei Geraden abc, also schneiden sich nach dem Satze von Desargues die Seiten in drei Puncten auf einer Geraden. Da nun β und β' und weiter γ und γ' sich auf der uneigentlichen Geraden schneiden, so müssen sich auch α und α' auf ihr schneiden, also ist $BCC'B'$ ein Parallelogramm, w. z. b. w.

Liegen zwei von den Strecken auf einer Geraden und sind sie derselben dritten gleich, so wird die angewandte Beweismethode hinfällig. Es ist dann zu beweisen, dass den Strecken auf derselben Geraden, die einer und derselben dritten gleich sind, gleiche Masszahlen zukommen.

Die Mitte einer Strecke $|AB|$ sei C. Wir projiciren ABC durch Parallelstrahlen auf eine parallele Gerade nach $A'B'C'$. Dann liegen die Dreiecke ACA' und $B'C'B$ einander perspectiv, denn (AB'), (CC') und (BA') schneiden sich nach Seite 19 in einem Puncte, folglich schneiden sich die entsprechenden Seiten in Puncten einer Geraden, (AC) und $(B'C')$, (AA') und $(B'B)$ schneiden sich auf der uneigentlichen Geraden, folglich schneiden sich auch (CA') und (BC') auf der uneigentlichen Geraden, sie sind einander parallel. Also die beiden Hälften der Strecke $|AB|$, die Strecken $|AC|$ $|CB|$ sind beide gleich $|A'C'|$.

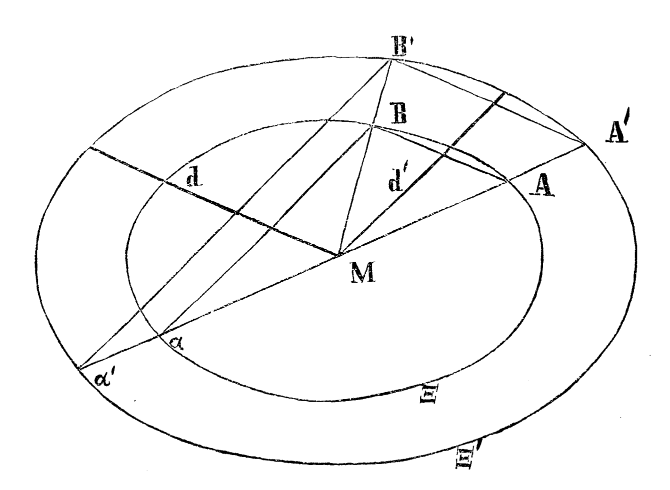
Gleiche Strecken zu gleichen Strecken addirt geben gleiche Strecken. Es sei (Fig. 73, Taf. XVI) $|AB| = |A'B'|$, $|BE| = |B'E'|$ auf parallelen Geraden. Wir construiren auf einer andern parallelen Geraden die $|BE|$ gleiche Strecke $|CD|$, sie ist auch $|B'E'|$ gleich. Dann sind die Dreiecke BCB' und EDE' einander perspectiv, weil sich $(BE)(B'E')(CD)$ in demselben uneigentlichen Puncte schneiden. Da sich nun $(BC)(ED)$ und $(B'C)(E'D)$ auf der uneigentlichen Geraden schneiden, so müssen auch $(EC')(BB')$ einander parallel sein. Also ist $AEE'A'$ ein Parallelogramm, $|AE| = |A'E'|$ w. z. b. w.

Auf jeder Geraden g hat man nun eine Masseinheit, man ziehe zu ihr einen ihr parallelen Halbmesser des Kegelschnittes Ξ und construire aus ihm und zwei Puncten auf g ein Parallelogramm. Die Seite auf g ist die Masseinheit für g. Nun kann man mit den beigebrachten Mitteln auf jeder Strecke angeben, wie viele Ganze, Halbe, Viertel, Achtel u. s. w. der Masseinheit sie enthält, und ihr so eine Masszahl zuordnen. Hat man auf

derselben Geraden zwei Strecken, die derselben ihnen parallelen dritten Strecke gleich sind, so ist erkenntlich, dass sie gleich viele ganze, halbe, viertel u. s. w Masseinheiten enthalten. Jeder Strecke ist eine bestimmte Masszahl zugeordnet.

Durch eine Reihe paralleler Geraden werden zwei beliebige gerade Linien in proportionale Theile getheilt. — Ist (Fig. 74, Taf. XVI) B die Mitte zwischen AC, und sind $(AA')(BB')(CC')$ parallele gerade Linien, so bilden sie mit der uneigentlichen Geraden einen harmonischen Büschel, also ist auch B' die Mitte von $|A'C'|$, und es ist $|AB|:|BC| = |A'C'|:|B'C'|$. Dasselbe gilt, wenn man $|AB|$ viertelt, achtelt u. s. w., woraus der Satz nach bekannten Schlussweisen folgt.

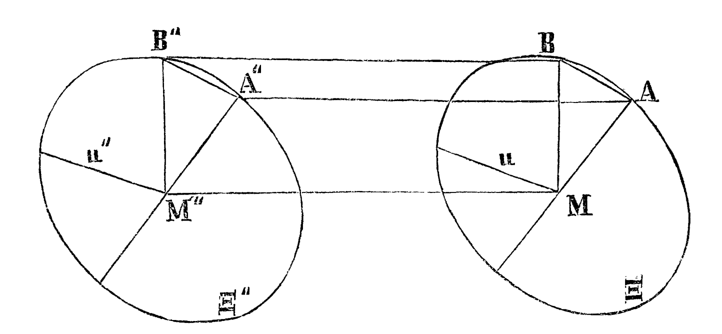
Die Durchmesser eines Kreises — so nennen wir jeden durch die absoluten Puncte gehenden Kegelschnitt — sind einander gleich. Es sei zunächst der Kreis Ξ' concentrisch Ξ. Alle Paare conjugirter Durchmesser von Ξ sind auch für Ξ' conjugirt (Seite 149). Die Linien AB und αB, $A'B'$ und $\alpha' B'$ sind dem



Paare conjugirter Durchmesser d, d' parallel, welche die Winkel αMB und AMB halbiren. Da es nur ein solches Paar giebt, so ist AB parallel $A'B'$, also bestimmt $|MA|$ auf $|MA'|$ den ebensovielsten Theil als $|MB|$ auf der Geraden $|MB'|$, oder es ist $|MA'|$ gleich $|MB'|$, w. z. b. w.

Ist Ξ' nicht concentrisch Ξ, so kann man erst einen Ξ' concentrischen Kreis Ξ'' construiren, dessen Durchmesser alle gleich den Durchmessern von Ξ sind. Dies findet statt, wenn ein einziger

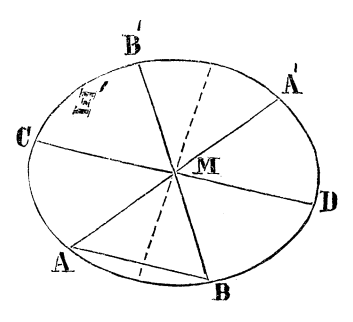
Durchmesser von Ξ'' einem parallelen von Ξ gleich ist. Diese seien MA und $M''A''$. Zieht man dann MB und $M''B''$ einander parallel, so sind AB und $A''B''$ denjenigen Durchmessern von Ξ und Ξ'' parallel, welche den Nebenwinkel von AMB und $A''M''B''$ halbiren. Da die Schenkel derselben parallel sind, so müssen auch die sie halbirenden Linien u und u'', mithin (AB)



und $(A''B'')$ einander parallel sein. Da sich also (AB) und $(A''B'')$, (MB) und $(M''B'')$, (MA) und $(M''A'')$ auf der unendlich fernen Geraden schneiden, und (MM''), (AA'') einander parallel sind, so muss ihnen auch BB'' parallel sein (durch denselben uneigentlichen Punct mit ihnen gehen). Also ist $MBB''M''$ ein Parallelogramm, und $|MB| = |M''B''|$. Hieraus folgt nun leicht die Richtigkeit des Satzes für Ξ'.

Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Basis einander gleich.

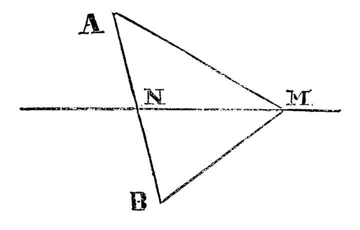
Man construire einen Kreis Ξ', dessen Mittelpunct der Scheitel des Dreiecks ist, und der durch die Ecken AB geht. Zieht man den AB parallelen Durchmesser CD, so ist Winkel MBA gleich Winkel CMB' und gleich BMD als Scheitelwinkel. Ferner ist Winkel BAM gleich Winkel DMA'. Aber $A'MD$ gleich BMD, weil $|DC|$ der Durchmesser ist, welcher den Winkel $A'MB$ halbirt.



Umgekehrt: Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so ist es ein gleichschenkliges. (Indirect.)

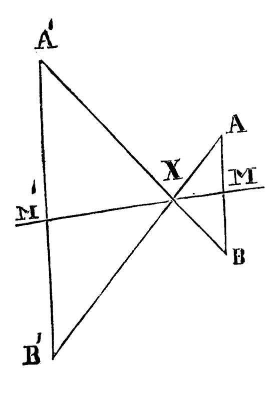
Errichtet man in der Mitte einer Strecke eine Senkrechte, so

ist dieselbe der geometrische Ort der Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, deren Grundlinie die gegebene Gerade ist. Denn man kann durch einen Punct M der Senkrechten und durch A eine Curve zweiter Ordnung legen, deren Paare conjugirter Durchmesser den Paaren conjugirter Durchmesser von Ξ parallel sind. Da (MN) und (AB) einem solchen Paare conjugirter Durchmesser parallel sind, so muss die Sehne (AN) der gezogenen Curve dieselbe in einem Puncte β treffen, so dass N die Mitte von $|A\beta|$ ist. Also muss β auf B fallen. Da nun die gezogene Curve nach unserer Definition ein Kreis ist, so ist $|AM|$ gleich $|BM|$, w. z. b. w.



Zusatz. Die Geraden, die die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks hälften, schneiden sich auf der die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindenden Geraden, die zugleich den Winkel an der Spitze hälftet.

Wenn man die Endpuncte zweier parallelen Strecken AB und $A'B'$ verbindet, so geht durch den Schnittpunct X der Verbindungslinien auch die Linie, welche durch die Mitten der beiden Strecken geht, weil harmonische gerade Gebilde, die einen Punct gemein haben (hier den uneigentlichen), einander stets perspectiv sind.



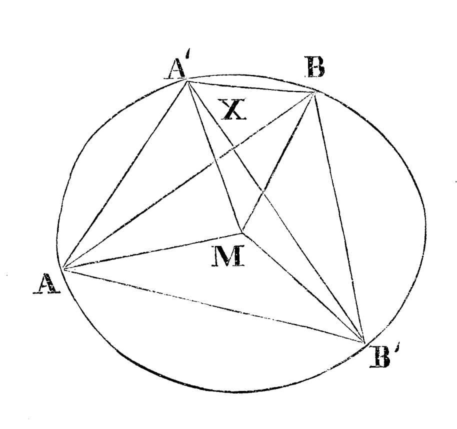
Hälftet man in einem gleichschenkligen Dreiecke den Winkel an der Spitze, so steht diese Linie senkrecht auf der Basis und geht durch deren Mitte. (Beweis leicht).

Es wird von dem Satze Gebrauch gemacht, dass gleiche Strecken zu gleichen Strecken addirt gleiche Strecken ergeben, der bisher nur für parallele Strecken erwiesen wurde. — Es sei $|AB| = |AB'|$, $|BC| = |B'C'|$, so ist $|AB| : |BC| = |AB'| : |B'C'|$, und folglich ist nach der Umkehrung eines oben bewiesenen Satzes über die Proportionalität durch parallele Linien auf zwei Geraden bestimmter Strecken, (BB') parallel (CC'). Legt man nun durch BB' einen Kreis, der A zum Mittelpuncte hat, und einen zweiten durch C, der ebenfalls A zum Mittelpuncte

hat, so trifft die zu (BB') durch C gelegte parallele Gerade diesen Kreis in demselben Puncte als die Gerade AB', also im Puncte C', der Kreis durch C geht auch durch C', es ist $|AC| = |AC'|$.

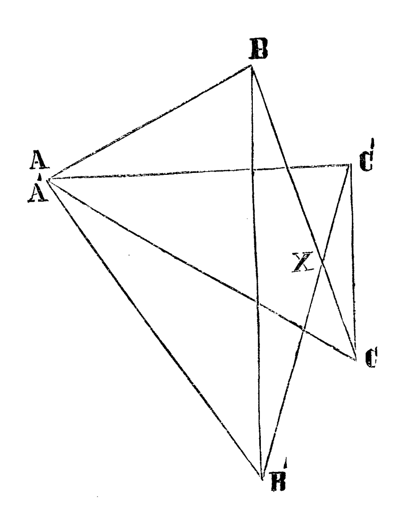
In einem Kreise Ξ gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Sehnen und umgekehrt.

Es ist AB' parallel $A'B$. Eine Gerade durch die Mitten von AB' und von $A'B$ geht durch den Schnittpunct X von AB und $A'B'$, und ist nach Seite 74 Durchmesser. X ist demnach Mittelpunct eines Kreises durch $A'B$ sowohl, als eines Kreises durch AB', so dass also $|XA'| = |XB|$ und $|AX| = |B'X|$ ist, und mithin $|AB| = |AX| + |XB| = |A'X| + |B'X| = |A'B'|$ ist, w. z. b. w.



Die Umkehrung kann leicht indirect bewiesen werden.

In zwei Dreiecken, in denen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich sind, sind auch die dritten Seiten und die gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

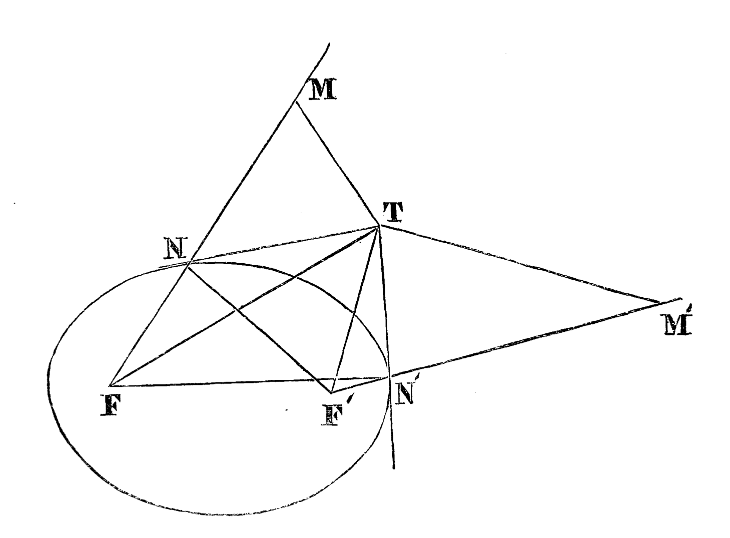


Sind die Seiten einander parallel, (AB) parallel $(A'B')$, (AC) parallel $(A'C')$, so folgt aus der Gleichheit der Seiten (AA') parallel (CC') parallel (BB'), die Dreiecke CAB und $C'A'B'$ liegen perspectiv, und folglich ist (BC) parallel $(B'C')$ und also $|BC| = |B'C'|$. Der Satz braucht daher nur noch bewiesen zu werden für solche Dreiecke, die eine gemeinsame Spitze haben, von welcher wir voraussetzen, dass es diejenige sei, bei welcher die nach der Voraussetzung gleichen Winkel liegen.

Da $|AB| = |A'B'|$ ist, so ist auch Winkel ABB' = Winkel $AB'B$. Ebenso Winkel $A'C'C$ = Winkel ACC'. Hälftet man nun den Winkel $C'AC$, etwa durch d, so halbirt d auch den Winkel BAB'. Also geht d durch die Mitte von $|BB'|$ und von CC', also durch den Schnittpunct X von (BC) und $(B'C')$, und da d senkrecht auf (BB') und (CC') steht, so ist BXB' gleichschenklig und CXC' gleichschenklig, also $|CX| = |C'X|$, $|BX| = |B'X|$, also $|BC| = |B'C'|$. Ferner Winkel XBB' = Winkel $XB'B$, also auch Winkel CBA = Winkel CBB' + Winkel $B'BA$ = Winkel $XB'B$ + Winkel $BB'A'$ = Winkel $C'B'A'$ u. s. w.

Zieht man in einer Ellipse von den Brennpuncten Strahlen nach einem Puncte der Curve (Brennstrahlen), so ist die Summe der durch die Brennpuncte FF' und Schnittpuncte bestimmten Strecken auf diesen Strahlen constant.

Beweis. Wir ziehen nach zwei Puncten N, N' der Ellipse die Brennstrahlen, verlängern $|FN|$ um $|F'N|$, d. h. machen in unserm Sinne $|NM| = |F'N|$, und $|F'N'|$ um $|FN'|$, und ziehen in N und N' die Tangenten NT, $N'T$. Dann ist Winkel MNT



= Winkel $F'NT$ (Seite 103), daher ist $|TM| = |TF'|$. Nun ist Winkel FTN = Winkel $F'TN'$, weil Winkel NTN' und Winkel FTF' durch dieselbe Gerade halbirt werden, und Winkel $F'TN$ = Winkel FTN'. Also ist Winkel FTM = Winkel $F'TM'$. Weiter sind in den beiden Dreiecken FTM und $F'TM'$ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, nämlich FT, TM und Winkel FTM

einerseits und $|TM'|$, $|F'T|$ und Winkel $F'TM'$ andrerseits einander gleich, mithin auch die übrigen gleich gelegenen Stücke, mithin $|FM| = |FN| + |F'N| = |F'M| = |FN'| + |F'N'|$, w. z. b. w.

Bei der Hyperbel ist die Differenz der Brennstrahlen constant.

Es ist nicht meine Absicht, nun den ganzen Apparat der messenden Geometrie durch diese Betrachtungen der projectiven Geometrie einzuverleiben, obschon es nicht schwer sein würde, die übrigen Congruenzsätze zu beweisen, die algebraischen Relationen, die zwischen conjugirten Halbmessern und den Halbachsen bestehen, die algebraischen Beziehungen der Curve zur Directrix, so nennt man die Polare eines Brennpunctes, u. s. w. aufzufinden. Es kam hier nur darauf an, principiell nachzuweisen, dass diese Sätze auch ohne die Hypothese eines festen forttragbaren Massstabes einen wohlbestimmten Sinn haben. Dass diese Sätze allgemein nicht der reinen projectiven Geometrie als zugehörig angesehen werden, hat wohl darin seinen Grund, dass das einen wesentlichen Bestandtheil der projectiven Geometrie bildende Gesetz der Dualität für sie nicht Bestand hat. Es mag noch bemerkt werden, dass diejenigen Sätze über congruente Figuren, die in der ebenen Geometrie im Grunde garnicht congruent sind, die aber doch congruent genannt werden, obschon sie nicht in der Ebene durch Drehung und Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, sondern erst durch Vermittelung des Raumes, durch Umklappen der Ebene um eine Achse, eine besondere Behandlung nöthig machen würden.

Nachträge und Bemerkungen.

Im Vorstehenden sind mehrfach projective Beziehungen aus gegebenen gewissermassen durch Composition hergestellt worden, und manche Theoreme stützen sich auf diese Composition. Die Anwendbarkeit dieser Sätze dürfte damit nicht erschöpft sein; ich gebe deshalb hier eine Zusammenstellung derselben.

1. Vertauscht man in einem Wurfe erst zwei Elemente, dann die beiden andern, so sind die vier entstehenden Würfe einander projectiv.

2. Vertauscht man in einem Wurfe zwei durch die beiden andern getrennte Elemente mit einander, und ist der so erhaltene Wurf dem ursprünglichen projectiv, so ist er ein harmonischer Wurf.

3. Ist $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge ABCD \barwedge AB'C'D \barwedge AB''C''D \barwedge \ldots,$
so ist $BB'B''\ldots \barwedge CC'C''\ldots$

4. Ist $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge ABXY \barwedge ABX'Y' \barwedge ABX''Y''\ldots$
und $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge CDUV \barwedge CDU'V' \barwedge CDU''V''\ldots$
und ist $XX'X''\ldots \barwedge UU'U''\ldots$
so ist auch $YY'Y''\ldots \barwedge VV'V''\ldots$

5. Die Würfe $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha\beta\gamma\delta''$ heissen einander entgegengesetzt, wenn $\alpha\delta\gamma\delta''$ ein harmonischer Wurf ist. — Sind zwei Würfe bez. zwei entgegengesetzten Würfen projectiv, so heissen die ersten ebenfalls entgegengesetzte Würfe. — Sind $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha\beta\gamma\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma\zeta, \ldots$ bez. $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, $\alpha'\beta'\gamma'\varepsilon'$, $\alpha'\beta'\gamma'\zeta', \ldots$ entgegengesetzte Würfe, so ist $\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\ldots \barwedge \alpha'\gamma'\delta'\varepsilon'\zeta'\ldots$ Ist der Wurf $\alpha\beta\gamma\delta$ dem Wurfe $\beta\gamma\alpha\delta$ entgegengesetzt, so ist er der Wurf des goldenen Schnittes.

6. Sind die Systeme von je sechs Elementen

$$\alpha\beta\,.\,\gamma\xi\,.\,\delta\eta,\quad \alpha\beta\,.\,\gamma\xi'\,.\,\delta\eta',\quad \alpha\beta\,.\,\gamma\xi''\,.\,\delta\eta''\ldots$$

in Involution, so ist $\xi\xi'\xi''\ldots \barwedge \eta\eta'\eta''\ldots$

7. Ist auf demselben Träger $\alpha\beta\beta'\beta''.. \barwedge \alpha\gamma\gamma'\gamma''..$ und ist $\alpha\beta\gamma\xi \barwedge \alpha\beta'\gamma'\xi' \barwedge \alpha\beta''\gamma''\xi''..$, so ist $\alpha\beta\beta'\beta''.. \barwedge \alpha\gamma\gamma'\gamma''.. \barwedge \alpha\xi\xi'\xi''..$, und die sich selbst entsprechenden Elemente zweier dieser Reihen entsprechen denselben Elementen auch in der dritten Reihe.

8. Ist auf demselben Träger $\alpha\alpha'\alpha''.. \barwedge \beta\beta'\beta''.. \barwedge \gamma\gamma'\gamma''..$, und haben die drei Reihen zwei reale oder ideale Elemente entsprechend gemein, und ist $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\delta' \barwedge \alpha''\beta''\gamma''\delta''..$, so ist auch $\alpha\alpha'\alpha''.. \barwedge \delta\delta'\delta''..$ Fallen die Elemente $\alpha^*\beta^*$ der beiden ersten Reihen zusammen, so folgt aus der Forderung $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\delta' \barwedge ..$ dass noch mindestens eins der vier letzten entsprechenden Elemente $\gamma^*\delta^*$ etwa γ^* mit α^* und β^* zusammenfallen muss.

9. Ist $\alpha\beta\gamma\tau\tau'\varphi\varphi'.. \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\tau'\sigma'\varphi'\psi'..$ und sind $\tau\tau'\sigma'\sigma$, $\varphi\varphi'\psi'\psi..$ harmonische Würfe, so bilden die Elemente $\tau'\sigma \,.\, \varphi'\psi..$ diejenige Involution, deren reale oder ideale Doppelelemente mit den sich selbst entsprechenden Elementen der projectiven Reihen $\alpha\beta\gamma.. \barwedge \alpha'\beta'\gamma'..$ identisch sind.

10. Sind $\lambda \,.\, \mu \,.\, \alpha\xi \,.\, \beta\eta$, $\lambda' \,.\, \mu' \,.\, \alpha\xi' \,.\, \beta\eta'$, $\lambda'' \,.\, \mu'' \,.\, \alpha\xi'' \,.\, \beta\eta''$,.. Involutionen, und sind auch $\lambda\mu \,.\, \lambda'\mu' \,.\, \lambda''\mu''..$ in Involution, so ist $\xi\xi'\xi''.. \barwedge \eta\eta'\eta''...$

Der Beweis des Satzes, dass die Schnittpuncte eines Kegelschnittbüschels mit einer durch einen Grundpunct gehenden Geraden g den Tangenten in einem Grundpuncte, oder allgemeiner den Polaren eines Punctes projectiv seien, ist auf Seite 107 nur für den Fall erbracht, dass alle vier Grundpuncte reale sind. Es ist aber von diesem Satze allgemein Gebrauch gemacht worden, so dass der Beweis für den Fall eines Paares realer und eines Paares idealer Grundpuncte nachzuholen ist. — Lassen wir in Fig. 57 auf Taf. XIII den Punct X auf g laufen, so erhalten wir den Kegelschnittbüschel durch die realen Puncte P_1P_2 und die realen oder idealen Puncte, die auf s als sich selbst entsprechende Elemente zweier projectiven Punctreihen gegeben sind. Werden die Puncte $TS(T')S'$ festgehalten, so bleibt auch Σ fest, weil $TSS'\Sigma$ ein harmonischer Wurf ist. Die Punctreihen X auf g und Q auf (P_1T) liegen einander perspectiv, also sind die Puncte X den Geraden $(Q\Sigma)$, den Polaren von S projectiv, w. z. b. w.

Hierauf bezieht sich die Verweisung auf Seite 124. Die Puncte $XX'X''..$ sind den Puncten $X'_1X'_1X''_1$ projectiv.

Besitzt eine Involution ideale Doppelemente, so ist jedes Paar der Involution durch jedes andere Paar getrennt, und es giebt daher kein weiteres zusammenfallendes Paar, wenn nicht jedes Paar (also auch jedes ideale Paar) ein sich selbst entsprechendes Paar ist.

Sind zwei projective Reihen $\alpha\beta\gamma\,.. \barwedge \alpha\beta\gamma'\,..$ gegeben, in denen $\alpha\beta$ ideale Elemente sind, so construire man, die Elemente als Puncte auf einer Geraden s annehmend, nach Seite 109 einen Kegelschnitt K, der durch die idealen Elemente hindurch geht. Gäbe es alsdann in der Projectivität ausser $\alpha\beta$ noch ein drittes sich selbst entsprechendes Element, etwa λ, so dass $\alpha\beta\lambda\gamma\,.. \barwedge \alpha\beta\lambda\gamma'\,..$ wäre, so müsste K mit s ein ideales Paar von Puncten und einen realen Punct gemein haben, was nur möglich ist, wenn die Gerade ganz in den Kegelschnitt fällt, also wenn die projectiven Gebilde $\alpha\beta\lambda\gamma\,.. \barwedge \alpha\beta\lambda\gamma'\,..$ congruent, d. h. identisch sind. Daraus folgt, dass der auf Seite 23 ausgesprochene Fundamentalsatz der projectiven Geometrie auch dann richtig bleibt, wenn von den drei Paaren entsprechender Elemente zwei Paare aggregirt ideale Elemente sind.

Sind $\alpha\beta$ ideale Elemente und ist $\alpha\beta\gamma\,.. \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\,..,$ so dass natürlich $\alpha'\beta'$ auch ideal sind, so ist die Aufgabe, zum Elemente δ der ersten Reihe das entsprechende Element δ' der zweiten zu finden, auf Seite 149 gelöst.

Bemerkung zu dem Satze auf Seite 108. Sind $uu'u''\,..,$ $vv'v''\,..,$ $ww'w''\,..$ projective Reihen, und ist $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge uvwx \barwedge u'v'w'x'$ $\barwedge u''v''w''x'' \barwedge \,..,$ so ist auch $uu'u''\,.. \barwedge xx'x''\,..$ — In diesem Satze kann die Projectivität $u\,.. \barwedge v\,..$ willkürlich sein, und es könnte scheinen, als ob auch die dritte $u\,.. \barwedge w\,..$ willkürlich wäre. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es fragt sich, was die Bedingung $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge uvwx$ bedeute, wenn uv real oder ideal zusammenfallen. — Schneiden wir einen Strahlbüschel $abcd$ durch eine Gerade g, die den Büschel in den Puncten $ABCD$ trifft, und durch eine zweite g', die ihn in den Puncten $A'B'C'D'$ trifft, so finden wir, dass, wenn $A'B'$ zusammenfallen, wenn also g' durch den Büschelträger geht, entweder auch noch die beiden andern Puncte $C'D'$ mit $A'B'$ zusammenfallen, oder wenn g' mit einem Strahle des Büschels zusammenfällt, dass wenigstens drei der Puncte zusammenfallen müssen. Also für perspective, und daher auch für projective Gebilde gilt der Satz, ist $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\delta'$, und fallen $\alpha'\beta'$ zusammen, so fällt mindestens noch eins der Elemente $\gamma'\delta'$

mit $\alpha'\beta'$ zusammen. Die Ausdehnung dieses Satzes auf ideale Elemente mag bei Seite gelassen werden. In der Forderung, dass $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge uvwx$ sein soll, die nicht völlig klar ist, wenn uv zusammenfallen, liegt die Möglichkeit der Beschränkung der Projectivität $u \ldots \barwedge w \ldots$ Wir begnügen uns damit a posteriori zu erkennen, für welche Art der Projectivität $u \ldots \barwedge w \ldots$ der obige Satz erwiesen ist.

Die Geraden $uu' \ldots$, $vv' \ldots$, $ww' \ldots$, $xx' \ldots$ wurden durch einen realen Punct B gezogen, und A war ein andrer realer Punct, durch den die Geraden $gg'g'' \ldots$ zu ziehen waren. Zum Beweise des angezogenen Satzes construirten wir einen Kegelschnittbüschel, worauf wir hier näher eingehen wollen. Wir nehmen eine Gerade s' an, die nicht durch A oder B geht, und bestimmen auf ihr zwei reale oder ideale Puncte CD, in denen sie von den sich selbst entsprechenden Strahlen der projectiven Büschel $uu'u'' \ldots \barwedge vv'v'' \ldots$ getroffen wird. Durch $ABCD$ legen wir den Kegelschnittbüschel. Eine Gerade g durch A trifft die Geraden uvw und die durch die Bedingung $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge uvwx$ gegebene Gerade x in Puncten $UVWX$. Durch diese Puncte sind vier Kegelschnitte $K_u K_v K_w K_x$ des Büschels bestimmt. Eine andere Gerade g' durch A trifft die Kegelschnitte in den Puncten $U'V'W'X'$, und es ist nach bekannten Sätzen $U'V'W'X' \barwedge \alpha\beta\gamma\delta$, die Geraden $B(U'V'W'X')$ oder $u'v'w'x'$ sind ebenfalls $\alpha\beta\gamma\delta$ projectiv. Fällt U' auf den realen oder idealen Punct C (oder auch auf D), so fallen $U'V'W'X'$ zusammen, und die Forderung $\alpha\beta\gamma\delta \barwedge u'v'w'x'$ muss, wenn unser Beweis Geltung haben soll, dahin verstanden werden, dass alle vier Strahlen $u'v'w'x'$ zusammenfallen, wenn $u'v'$ zusammenfallen. Der Satz ist also bewiesen unter der Bedingung, dass die Projectivitäten $uu' \ldots \barwedge vv' \ldots \barwedge ww' \ldots$ gemeinsame Doppelstrahlen haben, was auf Seite 108 ausdrücklich bemerkt, aber nicht näher motivirt wurde.

Auf Seite 53 wurde versprochen, die Aufgabe, die Verbindungslinie der zwei letzten realen oder idealen Schnittpuncte zweier Kegelschnitte KK', die durch je fünf Puncte $LMABC$ und $LMA'B'C'$ gegeben sind, linear zu construiren. — Die Gerade s gleich (LM) und die gesuchte Gerade s' werden von jeder Geraden in einem Paare der Involution geschnitten, die der Büschel (KK') auf ihr bestimmt. Die Schnittpuncte (aK) (aK') (bK) (bK') der Geraden a gleich (AA'), b gleich (BB') werden mit dem Pascal'schen Satze linear gefunden. Dann sind von den Involu-

tionen $A(aK) \,.\, A'(aK') \,.\, (as)(as')$, $B(bK) \,.\, B'(bK') \,.\, (bs)(bs')$ je zwei Paare gegeben, die Elemente $(as')(bs')$ der Paare $(as)(as')$ und $(bs)(bs')$ werden aus den gegebenen und damit wird s' linear gefunden.

Bringt man zwei projective Strahlbüschel mit demselben Träger zum Schnitt mit einem Kegelschnitte K, so sind im Allgemeinen die Schnittpuncte mit der Curve keine projectiven krummen Punctreihen, was um so weniger auffällt, als jeder Strahl die Curve zweimal trifft. Es ist daher bemerkenswerth, dass auf Seite 151 erwiesen ist, die krummen Reihen seien einander projectiv, wenn die sich selbst entsprechenden Strahlen der projectiven Büschel die realen oder idealen Tangenten vom Büschelträger an die Curve sind. Als entsprechende Schnittpuncte zweier entsprechender Strahlen mit der Curve sind dann solche zu wählen, die durch continuirliche Aenderung der Strahlen in den Büscheln continuirlich in einander übergeführt werden. Um ein Beispiel zu geben, das mit Hülfe der messenden Geometrie leicht controlirt werden kann, nehmen wir die projectiven Büschel im Mittelpuncte eines Kreises an, und lassen die nach den absoluten Puncten gehenden Strahlen sich selbst entsprechen. Die projectiven Büschel sind dann congruente Büschel. Projicirt man die Schnittpuncte der Büschel mit dem Kreise von einem Puncte des Kreises, so erhält man wieder congruente Büschel.

Projicirt man von einem Puncte G die Puncte ABC.. eines Kegelschnittes K nach den Puncten $A'B'C'$.. desselben Kegelschnittes, diese von G' aus nach $A''B''C''$.. auf K, so stützen sich die Geraden $(AA'')(BB'')(CC'')$.. auf eine Curve zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$, die K doppelt berührt, und zwar in den realen oder idealen Schnittpuncten der Geraden g gleich (GG') mit K (Seite 94). Dieser Satz führt zu einer einfachen Construktion des Berührungspunctes von (AA'') und $\mathfrak{K}$. Jede Gerade h trifft nämlich K, $\mathfrak{K}$ und die Gerade g in Puncten einer Involution, von der (hg) ein Doppelpunct ist. Berührt h die Curve $\mathfrak{K}$, so ist der Berührungspunct der zweite Doppelpunct. Es ist mithin, wenn h gleich (AA'') ist, der Berührungspunct $(h\mathfrak{K})$ vom Schnittpuncte (hg) durch AA'' harmonisch getrennt. Wenn man demnach A mit G' verbindet, A'' mit G und den Schnittpunct $(AG')(A''G)$ mit A', so giebt die letzte Verbindungslinie auf h gleich (AA'') den Stützpunct.

Sind zwei gerade Linien ss' durch zwei Paare gegenüberliegender Ecken eines Vierseits harmonisch getrennt, so sind sie (Seite 76) auch durch das dritte Paar harmonisch getrennt. Legt man (Fig. 75) durch die Ecken ABC eines Dreiecks drei Transversalen, die sich in Q, die gegenüberliegenden Seiten aber in $A'B'C'$ schneiden, und werden $A''B''C''$ so bestimmt, dass $AC'BC''$, $BA'CA''$, $CB'AC''$ harmonische Würfe sind, so liegen $A''B''C''$ in einer Geraden, und es liegen $B''C'A'$, $A''C'B'$ bez. in einer Geraden (Seite 17). Betrachtet man nun $(B''A'')(A''B')(B'A')(A'B'')$ als Seiten eines Vierseits, so sind $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ gegenüberliegende Ecken desselben. Trifft eine Gerade die Dreiecksseiten $(BC)(CA)(AB)$ bez. in den Puncten XYZ, und sind $X'Y'Z'$ von diesen Puncten durch $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ harmonisch getrennt, so liegen auch $X'Y'Z'$ in einer Geraden. Dies lässt sich wie folgt aussprechen. Zieht man in einem Dreiecke ABC drei Transversalen, die sich in einem Puncte schneiden, und bestimmt man zu deren Fusspuncten $A'B'C'$ die Puncte $A''B''C''$ so, dass sie durch die zugehörigen Ecken von $A'B'C'$ harmonisch getrennt sind, schneidet man $(BC)(CA)(AB)$ durch eine Gerade in den Puncten XYZ und bestimmt $X'Y'Z'$ so, dass $A'XA''X'$, $B'YB''Y'$, $C'ZC''Z'$ harmonische Würfe sind, so liegen auch $X'Y'Z'$ auf einer Geraden, oder legt man durch $X'Y'$ eine Gerade, wenn $X'Y'$ von XY bez. durch $A'A''$, $B'B''$ harmonisch getrennt sind, so bestimmt sie auf AB einen Punct Z', der von Z durch $C'C''$ harmonisch getrennt ist.

Satz von Poncelet. Sind KK_1K_2 Kegelschnitte eines Büschels, und nehmen wir an, um einen bestimmten Fall als Grundlage der Untersuchung zu haben, dass die Doppelsehnen ss' diese Kegelschnitte in idealen Puncten treffen, so können wir behufs leichter Herstellung einer Zeichnung annehmen, KK_1K_2 seien Individuen eines Kreisbüschels. Der auszusprechende Satz und die beizubringenden Beweismomente sind jedoch davon unabhängig. — Ziehen wir vom Puncte A auf K eine in G_1 berührende Tangente an K_1, die K in A' trifft, von A' eine K_2 in G_2 berührende Gerade, die K zum zweiten Male in A'' trifft, so stützt sich die Gerade h gleich (AA'') auf einen Kegelschnitt K_3 des Büschels, wenn man A und damit $A'A''$ auf K, G_1 auf K_1, G_2 auf K_2 laufen lässt.

Die Gerade h berührt einen K doppelt berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in dem Puncte G_3, den die Verbindungslinie von A' mit dem Schnittpuncte $(AG_2)(A''G_1)$ auf h bestimmt. Der Schnitt-

punct der Geraden g gleich $(G_1 G_2)$ mit h sei G'_3, er ist von G_3 durch AA'' harmonisch getrennt. $G'_1 G'_2$ seien bez. von $G_1 G_2$ durch AA', $A''A'$ harmonisch getrennt. Die Geraden ss' sind dann nach bekannten Eigenschaften des Büschels (KK_1) durch $G_1 G'_1$, $G_2 G'_2$ und nach dem voraufgehenden Satze auch durch $G_3 G'_3$ harmonisch getrennt. Auf der Geraden h bilden die Kegelschnitte des Büschels eine Involution, die durch die Puncte AA''. (sh) $(s'h)$ vollständig bestimmt ist. Da diese beiden Paare von $G_3 G_3'$ harmonisch getrennt sind, so sind $G_3 G_3'$ die Doppelpuncte dieser Involution, d. h. ein Kegelschnitt K_3 des Büschels (KK_1) berührt die Gerade h in G_3. Poncelet, der diesen Satz auf metrischem Wege erwiesen hat, schliesst weiter wie folgt. Lässt man A continuirlich auf K wandern, so bilden die Geraden h einen continuirlichen Strahlbüschel, der sich auf eine continuirliche Curve Γ stützt. Der Stützpunct von h ist der Punct G_3, wie man erkennt, wenn man A continuirlich ändert. Da nun zu jedem h eine Curve des Büschels (KK_1) gehört, die h in demselben Puncte G_3 berührt, so kann die Curve Γ auch als Stützcurve einer Kegelschnittmannigfaltigkeit aufgefasst werden. Die Kegelschnitte dieser Mannigfaltigkeit bilden aber einen Büschel, sie können deshalb nicht die continuirliche Tangentenfolge (Folge berührender Kegelschnitte) von Γ sein, wie die Strahlen eines linearen Büschels nicht die continuirliche Tangentenfolge einer continuirlichen Curve bilden können. Daraus folgt, dass die Curve Γ ein Kegelschnitt K_3 des Büschels (KK_1) selbst sein muss. Die Erweiterung des gefundenen zu dem allgemeinen Poncelet'schen Satze: *Sind die Ecken eines n-ecks-n-seits einem Kegelschnitt K eines Büschels (KK_1) eingeschrieben, und berühren die Seiten der Reihe nach die Kegelschnitte $K_1 K_2 \ldots K_n$ des Büschels, so lässt sich dieses Vieleck so bewegen, dass die Ecken immer derselben Curve eingeschrieben bleiben, und die Seiten sich immer auf dieselben Curven des Büschels stützen,* macht keine Schwierigkeiten. Der specielle Fall, in denen die Seiten sich alle auf denselben Kegelschnitt stützen, wurde fürs Dreieck auf Seite 50 erwiesen.

Liegen die Puncte $G_1 G_2 G_3 \ldots G_{2n-1}$ auf einer Geraden g, und projicirt man die Puncte $ABC \ldots$ einer Curve zweiter Ordnung K auf die Puncte $A_1 B_1 C_1 \ldots$ derselben Curve von G_1 aus, diese von G_2 aus nach den Puncten $A_2 B_2 C_2 \ldots$ derselben Curve u. s. w.,

die Puncte $A_{2n-2}B_{2n-2}C_{2n-2}\,..$ nach den Puncten $A_{2n-1}B_{2n-1}C_{2n-1}\,..$ des Kegelschnittes, so ist

$$ABC\,..\;\overline{\wedge}\;A_{2n-1}B_{2n-1}C_{2n-1}\,..$$

und das Perspectivitätscentrum G_{2n} liegt auf g.

Dass $ABC\,..\;\overline{\wedge}\;A_{2n-1}B_{2n-1}C_{2n-1}\,..$ sei, ist früher bewiesen, trifft g die Curve K in den Puncten L und M, die auch ideal sein können, so erkennt man sofort, dass

$$ABCLM\,..\;\overline{\wedge}\;A_{2n-1}B_{2n-1}C_{2n-1}ML\,..$$

ist, die Puncte LM bilden ein Paar, die Reihen sind in Involution, liegen also perspectiv. Der die Punctreihen projicirende Punct G_{2n} enthält die Gerade g gleich (LM), das Perspectivitätscentrum G_{2n} muss auf g liegen, w. z. b. w. — Soll man durch die Puncte $G_1G_2\,..\,G_{2n-1}G'_{2n}$ auf g ein $2n$-seit legen, von dem $2n$ Ecken auf K liegen, so fallen alle Seiten desselben auf g, wenn G'_{2n} von G_{2n} verschieden ist.

Die Algebra giebt für die Gleichungen vierten Grades eine Resolvente vom dritten Grade. Die geometrischen Aufgaben vierten Grades laufen darauf hinaus, die Schnittpuncte zweier durch Puncte gegebener Kegelschnitte zu finden. Das Doppelpolardreieck dieser Kegelschnitte wird durch die Schnittpuncte zweier Kegelschnitte gefunden, von denen einer bekannt ist (Seite 127). Dies ist eine Aufgabe dritten Grades. Die Doppelsehnen durch die Doppelpole zu finden, ist eine Aufgabe zweiten Grades, und die Schnittpuncte dieser mit den beiden Curven werden wieder durch Lösung einer Aufgabe zweiten Grades gefunden. Also reduciren sich auch geometrisch die Aufgaben vierten Grades auf solche vom dritten Grade.

Bemerkung zu dem auf Seite 130 ausgesprochenen Lehrsatze: Durch einen Punct L und drei Paare conjugirter Puncte AB auf g, $A'B'$ auf g', $A''B''$ auf g'' ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt, wenn nicht $ABA'B'A''B''$ Ecken eines Vierseits sind. — Dieser Satz bedarf einer etwas stärkeren Einschränkung. Bestimmt man drei Kegelschnitte $K_1K_2K_3$ durch die beiden Paare conjugirter Puncte AB, $A'B'$ und bez. durch die Puncte LM_1, LM_2, LM_3, so kann man sie als Grundkegelschnitte einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit, eines Netzes von Kegelschnitten ansehen, dessen Individuen durch L gehen, und für die AB, $A'B'$ Paare conjugirter Puncte sind. Denn man kann erst einen Kegel-

schnitt K_4 des Büschels $(K_1 K_2)$ so zeichnen, dass er durch einen Punct N_1 auf einer Geraden s_1, und dann einen Kegelschnitt K_5 des Büschels $(K_1 K_3)$, der durch N_1 geht. In dem Büschel $(K_4 K_5)$ kann man einen Kegelschnitt so wählen, dass er durch einen Punct N_2 auf einer Geraden s_2 geht. So wird durch zwei Puncte $N_1 N_2$ ein Kegelschnitt des Netzes $(K_1 K_2 K_3)$ bestimmt, und man erhält alle Kegelschnitte des Netzes, wenn man $N_1 N_2$ die Geraden $s_1 s_2$ durchlaufen lässt, so dass ihre Mannigfaltigkeit zweifach unendlich ist. Es giebt unendlich viele Paare von Puncten, die für das Netz gleichzeitig conjugirt sind, auf jeder Geraden giebt es drei Puncte, denen je ein andrer für das Netz conjugirt ist. Sind $H_1 H_2 H_3$ die Pole der Geraden h für $K_1 K_2 K_3$, so erzeugen die Polaren von h für $K_1 K_2$ durch ihre Schnittpuncte einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{12}$, die Polaren für $K_2 K_3$ erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{23}$, $\mathfrak{K}_{12}$ und $\mathfrak{K}_{23}$ schneiden sich in H_2 und ausserdem noch in drei Puncten. Jeder dieser drei Puncte ist offenbar ein Punct, der einem Puncte auf h für das Netz conjugirt ist. Der geometrische Ort aller Puncte, die einen für das Netz conjugirten besitzen, ist eine Curve, die von jeder Geraden in drei Puncten geschnitten wird und die deshalb eine Curve dritter Ordnung genannt wird. Sind $A''B''$ ein Paar solcher für das Netz conjugirter Puncte, so giebt es nicht bloss einen Büschel von Kegelschnitten durch L, für die AB, $A'B'$, $A''B''$ conjugirte Paare sind, sondern ein Netz.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Taf.

Fig. 1.

Fig. 2.

Ta

Fig. 3a.

Fig. 3b.

Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig

Fig.

Fig. 9.

Fig. 10

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

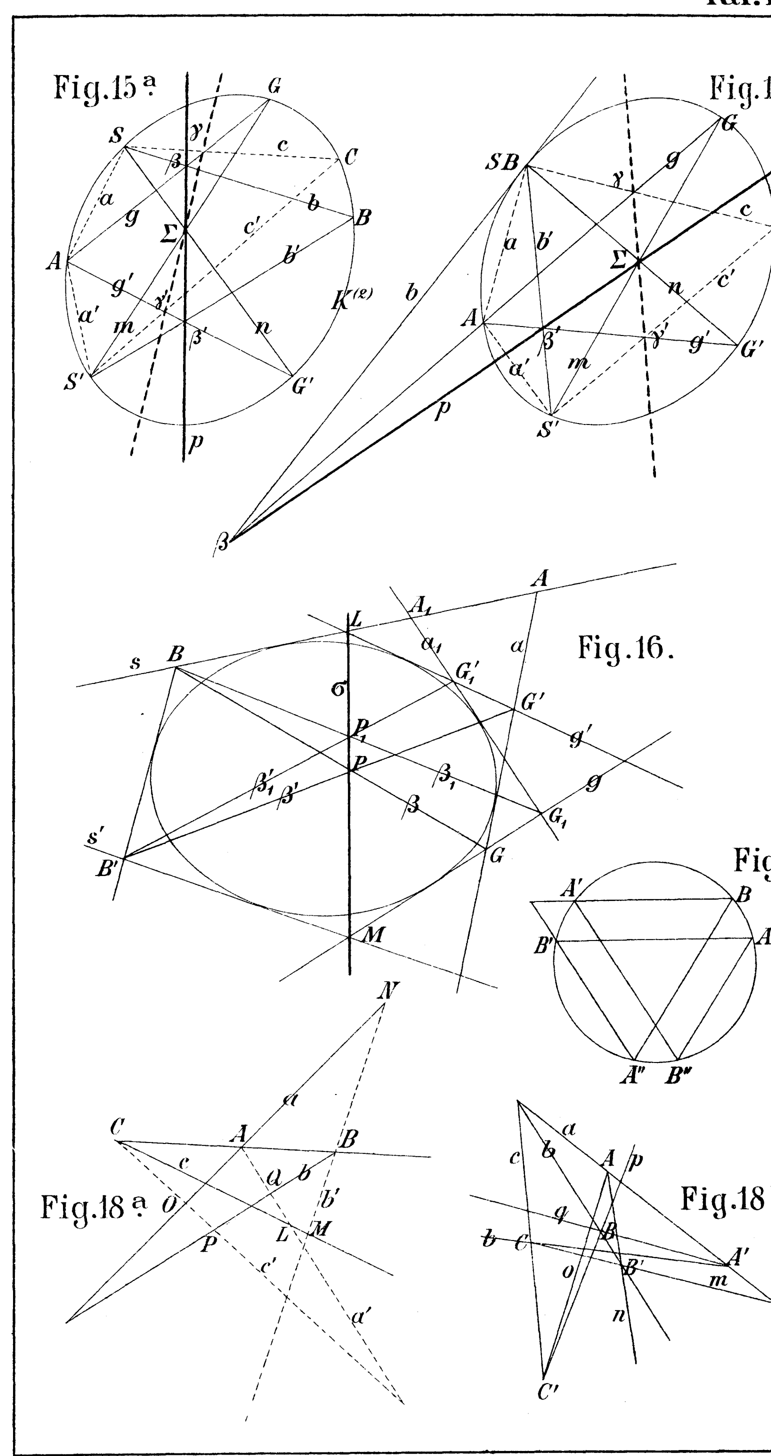

Taf.I
Fig.15ª
Fig.1
Fig.16.
Fig
Fig.18ª
Fig.18

Fig. 19.

Mac Laurin'sche Configuration.

Fig. 19a.

Fig. 19b.

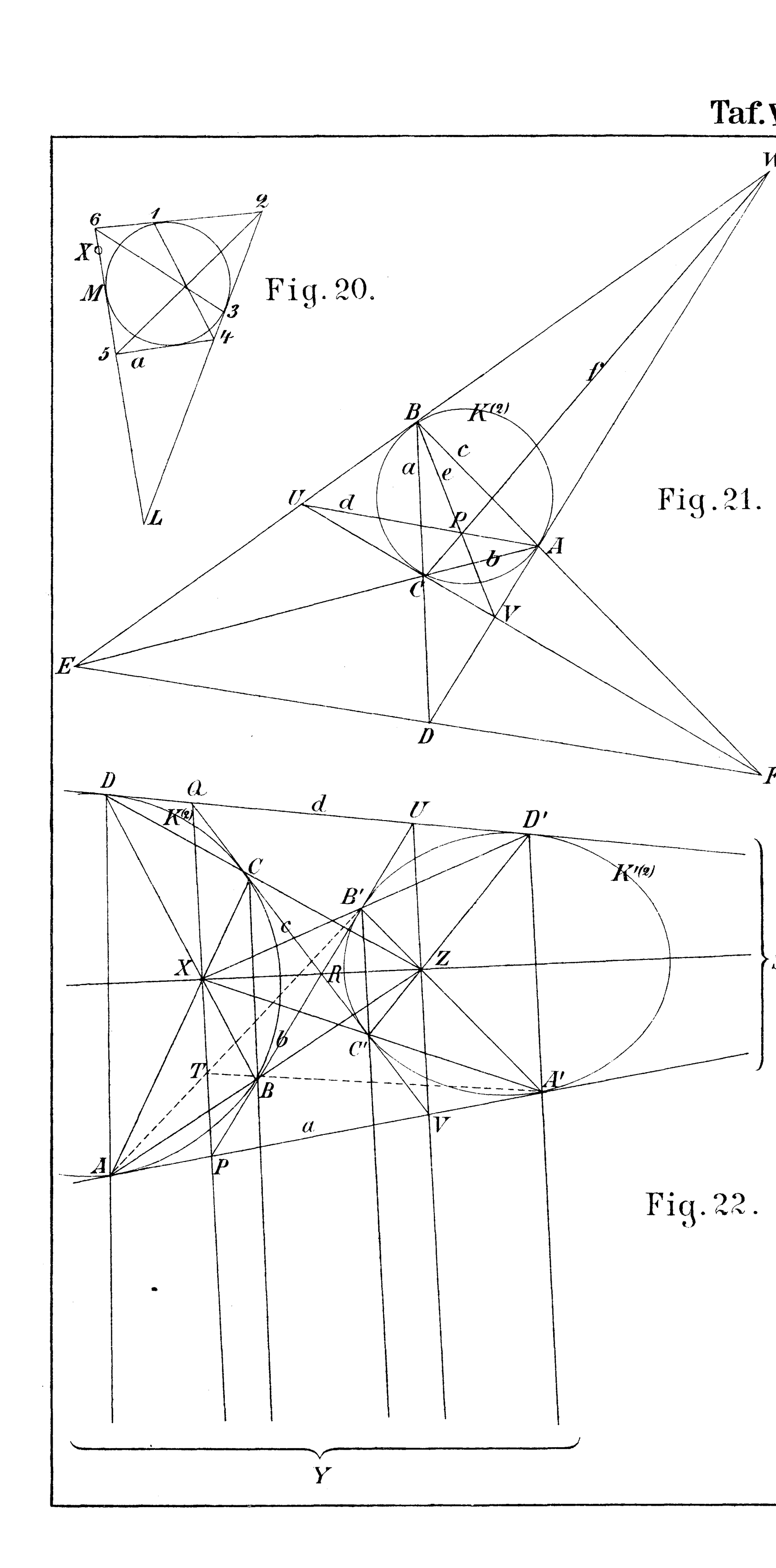


Fig. 20.
6
1
2
X
M
3
4
5
a
L
Fig. 21.
B
K^(2)
c
a
e
U
d
P
A
b
C
V
E
D
f
Fig. 22.
D
K^(2)
d
U
D'
K'^(2)
C
B'
c
X
R
Z
b
C'
T
B
A'
V
a
A
P
Y

Fig. 23 a.

Fig. 23

Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig

Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 3

Taf. I

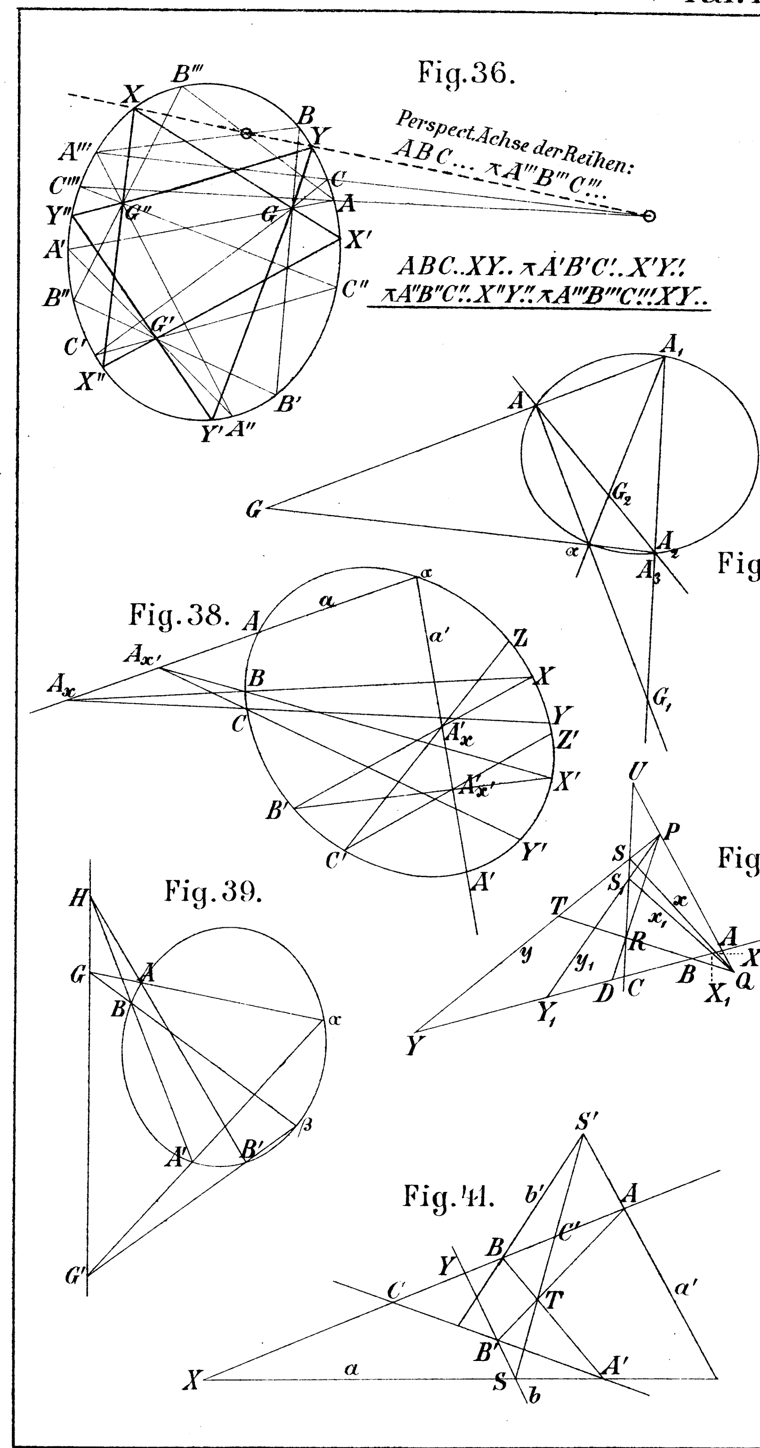
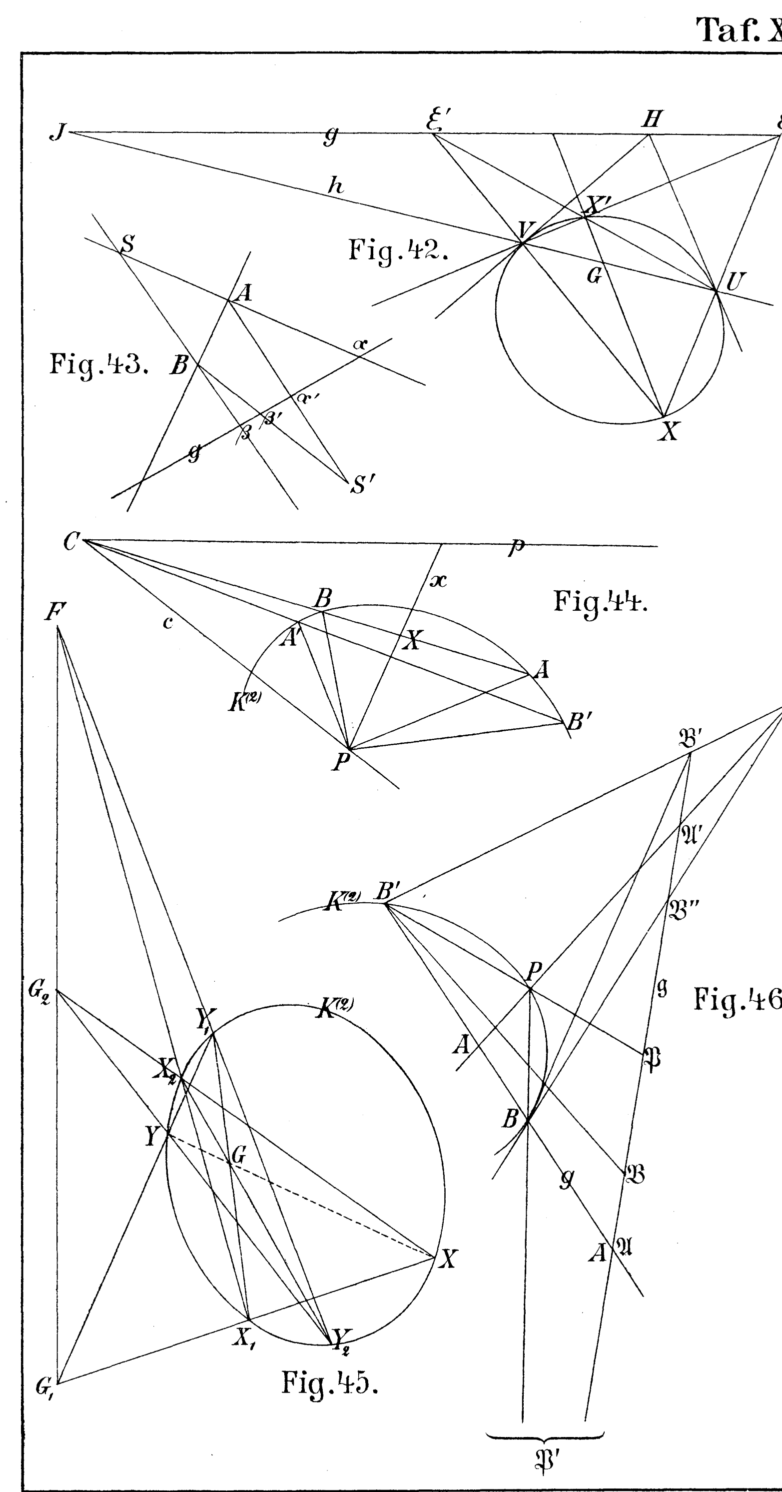


Fig. 36.
Perspect. Achse der Reihen:
ABC... ⊼ A'''B'''C'''...
ABC..XY.. ⊼ A'B'C'..X'Y'..
⊼ A''B''C''..X''Y''.. ⊼ A'''B'''C'''..XY..
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 41.

Taf. X



Taf. X

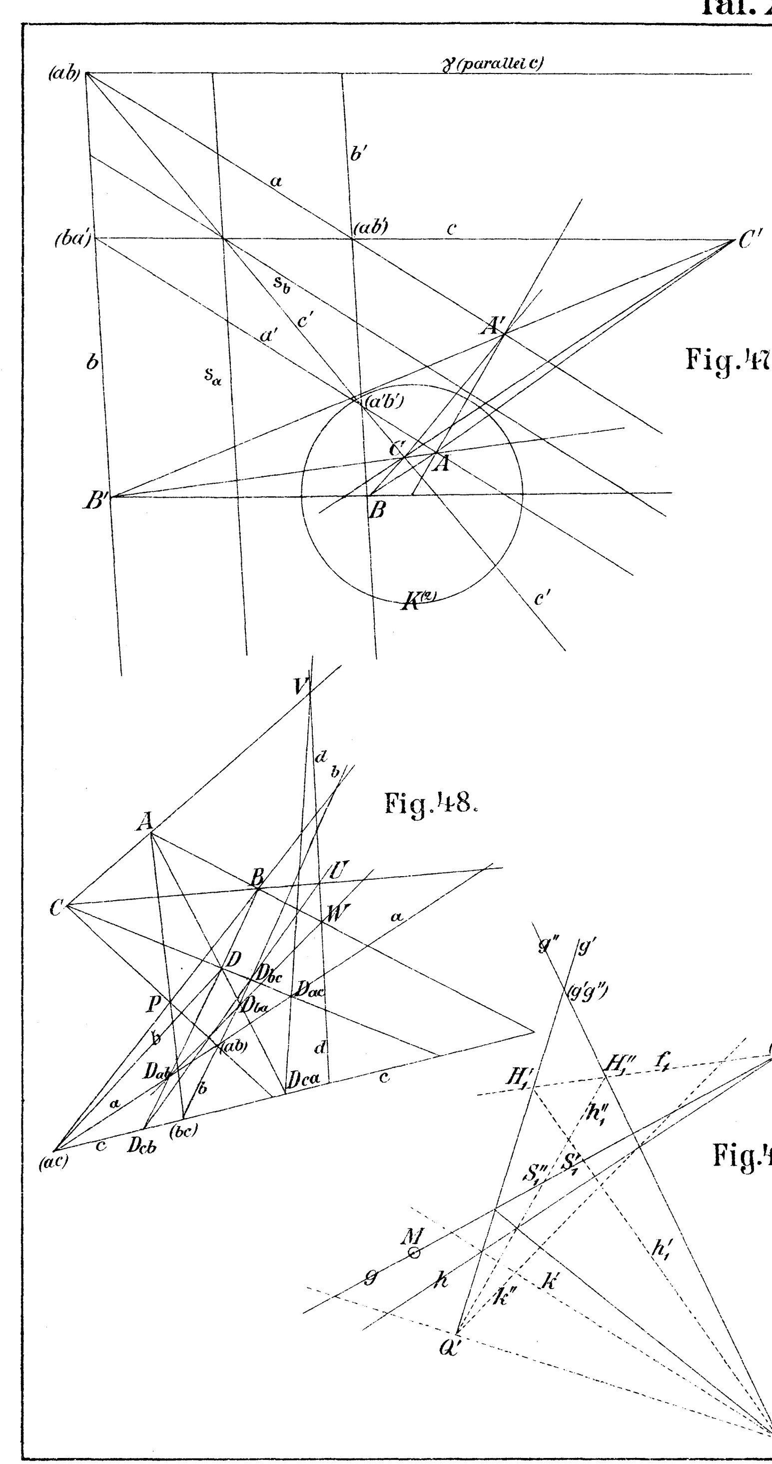


Fig. 50.

Fig. 51.

Fig.

Fig. 53.

Fig. 5

Fig. 55.

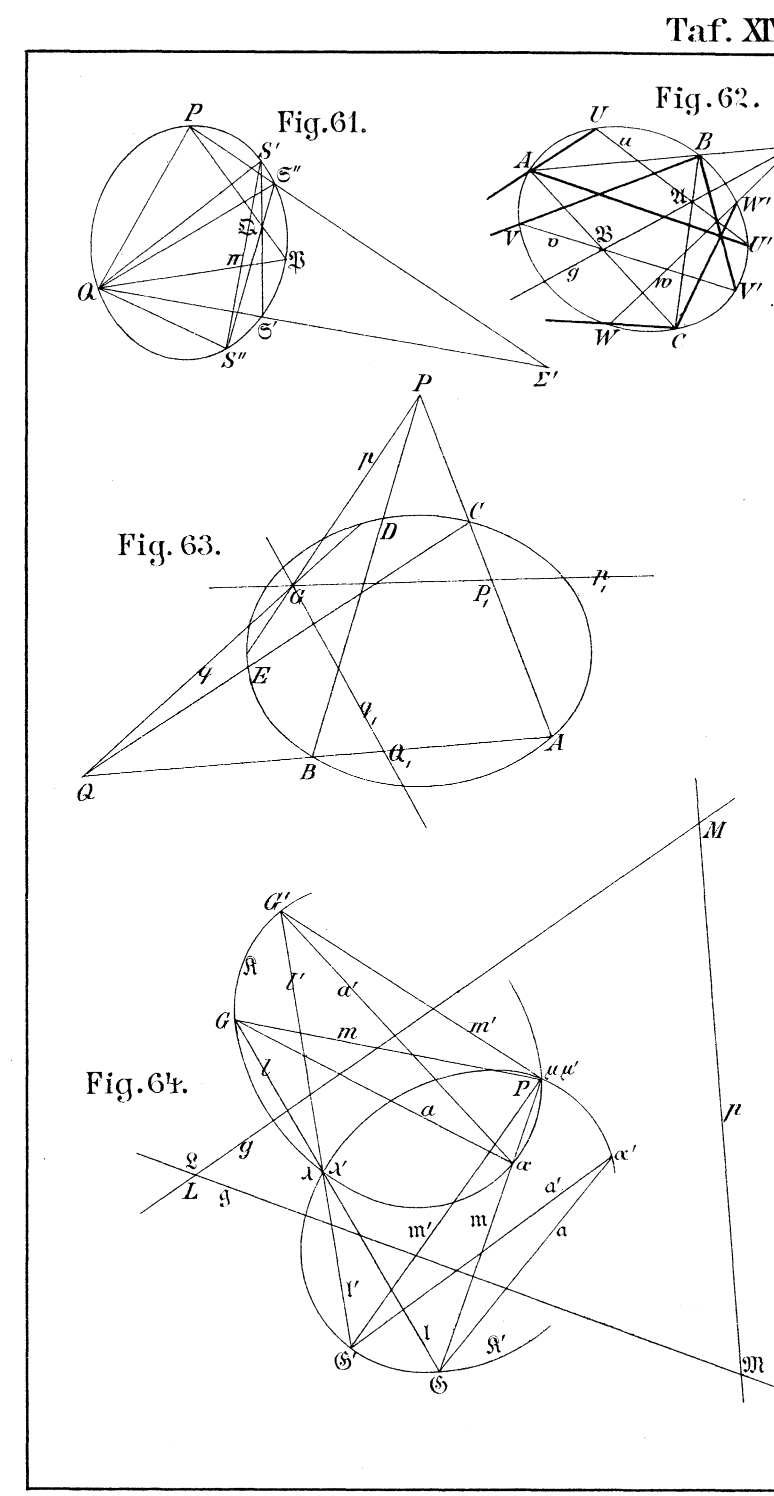
Fig. 56.

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 60.

Fig. 59.


Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.